View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Zhytomyr State University Library

International scientific conference

«Algebraic and geometric methods of analysis»

Book of abstracts

May 31 - June 5, 2017
Odessa
Ukraine

http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

Organizers

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Fomenko A.
(*Moscow, Russia*)
Fomenko V.
(*Taganrog, Russia*)
Glushkov A.
(*Odesa, Ukraine*)
Haddad M.
(*Wadi al-Nasara, Syria*)
Herega A.
(*Odesa, Ukraine*)
Khruslov E.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Kirichenko V.
(*Moscow, Russia*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mashkov O.
(*Kyiv, Ukraine*)
Mykytyuk I.
(*Lviv, Ukraine*)
Milka A.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Mikesh J.
(*Olomouc, Czech Republic*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Moskaliuk S.
(*Wien, Austri*)
Panzhenskiy V.
(*Penza, Russia*)
Pastur L.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Rahula M.
(*Tartu, Estonia*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Strikha M.
(*Kyiv, Ukraine*)
Shvets V.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Shurygin V.
(*Kazan, Russia*)
Vlasenko I.
(*Kyiv, Ukraine*)
Zadorozhnyj V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)
Zelinskiy Y.
(*Kyiv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Volkov V., Director of the Educational Research Institute of Mechanics, Automation and Computer Systems named after P. M. Platonov;
- Bukaros A., Dean of the Faculty of automation, mechatronics and robotics

Organizing commitee

Kirillov V.	Hladysh B.	Maksymenko S.
Konovenko N.	Nuzhnaya N.	Khudenko N.
Fedchenko Yu.	Osadchuk E.	Cherevko E.

Про біортогональні сітки ліній пари поверхонь

Л. Л. Безкоровайна
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: liliyabezk@gmail.com

Нехай дві поверхні S і S^* тривимірного евклідового простору задані векторно - параметричними рівняннями. Припустимо, що встановлено відображення цих поверхонь (за допомогою рівнянь, що однозначно виражають криволінійні координати однієї поверхні через координати іншої поверхні). Віднесемо ці поверхні до спільних координат u, v. Тоді, за теоремою Тіссо [1], існує одна і лише одна система ліній, що є ортогональною і на поверхні S, і на поверхні S^*, яка визначається рівнянням

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ E'du + F'dv & F'du + G'dv \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

де E, F, G і E', F', G' - коефіцієнти перших квадратичних форм заданих поверхонь.

Розгорнемо рівняння (1) до вигляду

$$(EF' - E'F)du^2 + (EG' - E'G)dudv + (FG' - F'G)dv^2 = 0. \tag{2}$$

Отже, диференціальне рівняння (2) визначає дійсну ортогональну регулярну сітку ліній, спільну для двох різних поверхонь. Такі сітки ліній в даній роботі називаються *біортогональними.* Досліджуються властивості біортогональних сіток для деяких пар поверхонь, віднесених до спільних координат.

Насамперед виникає необхідність у явному вираженні сіткового тензора для біортогональної сітки. Має місце

Теорема 1. *Сітковий тензор біортогональної сітки ліній для пари поверхонь можна подати у вигляді*

$$J_{\alpha\beta} = (c_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + c_{\beta\gamma} a_{\alpha\delta})\, g^{\gamma\delta},$$

де $c_{\alpha\gamma}$ - дискримінантний тензор поверхні S з компонентами

$$c_{11} = c_{22} = 0, \qquad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, \qquad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Для того, щоб здобути тензор біортогональної сітки, передусім необхідно від гаусових позначень геометричних величин в рівнянні (2) перейти до індексних позначень $u = x^1, v = x^2, E = g_{11}, F = g_{12}, G = g_{22}, E' = a_{11}, F' = a_{12}, G' = a_{22}$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що рівняння (2) набуває інваріантного вигляду

$$J_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0$$

або, що те ж саме,

$$(c_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + c_{\beta\gamma} a_{\alpha\delta})\, g^{\gamma\delta} dx^\alpha dx^\beta = 0.$$

Доведено, що біортогональна сітка є спільною як для пар паралельних поверхонь, так і для сімейства паралельних поверхонь у цілому. При цьому вона збігається з сіткою ліній кривини.

Знайдено рівняння біортогональної сітки деформованої поверхні S та здеформованої поверхні S^* за умови, що їх радіус-вектори пов'язані рівністю $(t \to 0)$

$$\overline{r}^*(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2).$$

Встановлено, що у випадку ареальної нескінченно малої деформації біортогональна сітка поверхонь S і S^* збігається з сіткою головних ліній деформації.

Ряд властивостей цієї сітки при ареальній нескінченно малій деформації сформульовано в [2].

Література

[1] M. Tissot. *Memoire sur la representation des surfaces et les projections des eartes geographiques.*Paris, 1881, p.337.

[2] Л. Л. Безкоровайна. *Головна сітка нескіченно малих деформацій із стаціонарною площею.*Тези доповідей 5-ої міжнародної конференції з геометрії та топології. Пам'яті О. В. Погорєлова, Черкаси 2003, ст. 12-13.

Про ізотопність функцій леми Морса

Бондар О. П.
(КЛА НАУ, Кропивницький)
E-mail: bondarkla@ukr.net

В. В. Шарко [1] дав означення ізотопних функцій Морса, за допомогою яких вивчались властивості многовидів, на яких було задано ці функції. З метою розширення можливостей вивчення зв'язку топології многовидів із заданими на них функціями було узагальнено поняття ізотопних функцій Морса, а саме, введено означення ізотопних функцій, [2]. Це означення, зокрема, дозволило побудувати шлях, [1], що поєднує функції леми Морса, показавши їх ізотопність.

Твердження 1. *Нехай $f_0 : R^n \to R$ — диференційовна функція і $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ — невироджена критична точка цієї функції. Тоді можна вказати координатні подання ізотопії*

$$H : U_0 \times [0,k] \to U_k \to [0,k], \qquad k \in N,$$

околу U_0 точки x_0 на деякий окіл U_k початку координат 0 простору R^n та ізотопії

$$h : V_0 \times [0,k] \to V_k \to [0,k], \qquad k \in N,$$

околу V_0 точки $f_0(x_0)$ на окіл V_k початку координат 0 простору R, такі, що диференційовні відображення

$$H_k \subset Iso_0(U_k), \qquad H_0 = id_{U_k},$$
$$h_k \subset Iso_0^+(V_k), \qquad h_0 = id_{V_k},$$

і для всіх точок $y = (y^1, \dots, y^n) \in U_k$, для яких $y^i(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$, функція

$$f_k = -(y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

буде локально ізотопною функції f_0:

$$f_k = h_k \circ f_0 \circ H_k^{-1},$$

тобто можна вказати такі локальні ізотопні перетворення систем координат, що функція f_0 буде локально диференційовно ізотопна функції f_k.

Існування локальної системи координат $(y^1, \dots, y^n)$, в якій справедлива тотожність

$$f_0(x^1, \dots, x^n) = f_0(x_0) + f_k(y^1, \dots, y^n),$$

є лемою Морса. Координатне подання необхідних ізотопій полягає у побудованій послідовності елементарних ізотопій

$$H^i : U_{i-1} \times [0,1] \to U_i \times [0,1], \quad i = 1, \dots, k, \qquad U_i \subseteq U_{i-1}, i = 2, \dots, k$$
$$H_t^i \subset Iso_0(U_k), \qquad H_0^i = id_{U_{i-1}}, \text{ для всіх } t \in [0,1],$$

і елементарних ізотопій

$$h^i : V_{i-1} \times [0,1] \to V_i \times [0,1], \quad i = 1, \dots, k, \qquad V_i \subseteq V_{i-1}, \ i = 2, \dots, k,$$
$$h_t^i \subset Iso_0^+(V_k), \qquad h_0^i = id_{V_{i-1}}, \text{ для всіх } t \in [0,1],$$

для яких кінцеве відображення попередньої елементарної ізотопії є початковим — тотожним — відображенням наступної, а композиції відповідних елементарних ізотопій є потрібними ізотопіями H_k і h_k.

Література

[1] В. В. Шарко. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). Киев: Наук. думка, 1990.
[2] О. П. Бондарь. Об определении изотопных функций. *Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2015*, (2015), С.67.

Інфінітезимальні деформації кругового циліндра зі стаціонарною рімановою зв'язністю

Вашпанова Н.В.
(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)
E-mail: vasha_nina@mail.ru

Потапенко І.В.
(Одеський національний університет ім.І.І. Мечникова, Одеса, Україна)
E-mail: igopotapenko@yandex.ru

У теперішній час нерідко можна спостерігати застосування кругового циліндра як в техніці, так і в медицині. Саме від технічного стану магістральних труб (мають форму циліндра) в першу чергу залежить стабільне транспортування газу, нафти та різних нафтопродуктів. Особливо це стосується тих ділянок, де труби деформуються під деяким зовнішнім навантаженням.

Відомо [1], що течія крові у великих кровоносних судинах характеризується відносно слабким впливом реологічних властивостей разом із сильним впливом механічних характеристик судиної стінки, в якості якої розглядають гіперпружну ізотропну трубку, яка в початковий момент часу має циліндричну форму, а потім деформується з часом.

У роботі [2] задача про існування інфінітезимальної деформації певного класу поверхонь обертання з фіксованою рімановою зв'язністю зведена до дослідження і розв'язування диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних відносно невідомої функції $\varphi(x^1, x^2)$ класу C^2 (в лініях кривини):

$$b_{11}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2} + b_{22}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2} + a\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + b\varphi = F,$$

де $b_{ij}(i = 1, 2)$ - коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні, a, b, F - відомі функції.

Розглянемо нескінченно малі деформації кругового циліндра зі стаціонарною рімановою зв'язністю.

Нехай круговий циліндр заданий рівнянням

$$\bar{r} = \{R\cos v, R\sin v, u\},$$

де R - радіус основи циліндра.

Слід відзначити, що циліндр не належить до класу поверхонь, що розглядалися в [2]. Тоді знайдена функція $\varphi(u, v)$ у випадку циліндра буде мати представлення:

$$\varphi(u, v) = \mu(v)u + \alpha.$$

Тут $u = x^1, v = x^2$, $\mu(v)$ - деяка довільна функція класу C^2, α - довільна стала.

Інфінітезимальну деформацію поверхні зі стаціонарною рімановою зв'язністю будемо називати тривіальною, якщо її вектор зміщення буде одночасно і вектором зміщення для нескінченно малого згинання.

Справедлива наступна

Теорема 1. *Круговий циліндр допускає нетривіальні інфінітезимальні деформації зі стаціонарною рімановою зв'язністю.*

Література

[1] К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид Механика кровообращения. - М:Мир - 1981-372 с.
[2] І. В. Потапенко. Характеристичне рівняння в теорії інфінітезимальних деформацій поверхонь обертання без омбілічних точок.-Proceedings International Geometry Center.-2013-6(4)-с.66-72

Критерій розщеплення у просторі Пелі-Вінера

Дільний Володимир Миколайович
(ДДПУ ім. І. Франка, м. Дрогобич, Україна)
E-mail: dilnyi@ukr.net

Гук Христина Олегівна
(ДДПУ ім. І. Франка, м. Дрогобич, Україна)
E-mail: xrustia.gyk@yandex.ua

Зображення математичних об'єктів у вигляді суми чи добутку об'єктів з простішими властивостями є одним з основних способів дослідження у математиці. Такими дослідженнями займалися Р. С. Юлмухаметов, Ю. І. Любарський, І. Е. Чижиков, Т. І. Гіщак та один з співавторів.

Простір Пелі-Вінера W^p_σ, $\sigma > 0$, це простір цілих функцій f експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать до $L^p(\mathbb{R})$. Простір W^p_σ може бути визначений і як простір цілих функцій, що задовольняють умову

$$\sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |(fre^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Б. В. Винницький та його учні розглядали задачу [1] про розщеплення функцій з простору Пелі-Вінера W^1_σ на суму двох функцій, кожна з яких характеризується тим, що її модуль є «великим» відповідно у верхній та нижній півплощині. Т. І. Гіщак та один зі співавторів розглядали наступну задачу в [2].

Задача розщеплення. *Чи для кожної функції $f \in W^1_\sigma$ можливий розклад $f = \chi+\mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : Rez > 0\}$, а також $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?*

Тут $E^p[\mathbb{C}(\alpha; \beta)], 0 < \beta - \alpha < 2\pi, 1 \leq p < +\infty,$ — простір аналітичних функцій f в

$$\mathbb{C}(\alpha; \beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\},$$

для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})| dr \right\} < +\infty.$$

Теорема Пелі-Вінера. *Простір W^2_σ збігається з простором функцій f, що зображаються*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt, \varphi \in L^2(-i\sigma; i\sigma)$$

В [2] запропоновано шукати розв'язок Задачі розщеплення у формі

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{1}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt, \qquad \chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \varphi(it) e^{itz} dt.$$

Ми доводимо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $f \in W^1_\sigma$. Функція χ, визначена рівністю (1), є розв'язком Задачі розщеплення тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=[\frac{m}{2}]}^{[\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{m - \frac{i}{2} - k} \right| < +\infty,$$

де $\varphi(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}$.

Наслідок 2. *Нехай* $f \in W_\sigma^1$ *і* $c_k = 0$ *для всіх* $k > 0$, *де коефіцієнти* (c_k) *визначені як вище. Тоді* χ *є розв'язком Задачі розщеплення.*

Література

[1] Б. В. Винницький. *Про узагальнення теореми Пелі-Вінера.* Математичні студії, 4 : 37–44, 1995.
[2] V. M. Dilnyi, T. I. Hishchak. *On splitting functions in Paley-Wiener space.* Mat. Stud., 45(2) : 137–148, 2016.

Геометричні властивості узагальнено опуклих множин

Ю. Б. Зелінський
(Інститут математики НАН України, Київ)
E-mail: zel@imath.kiev.ua

Означення 1. Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m-напівопукла щодо точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, якщо знайдеться m-вимірна напівплощина P, така що $x \in P$ і $P \cap E = \varnothing$.

Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m-напівопукла, якщо вона m-напівопукла щодо кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

Означення 2. Скажемо, що відкрита множина $G \subset \mathbb{R}^n$ слабко m-опукла, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \partial G$, яка належить до межі множини G.

Лема 3. *Кожна слабко $(n-1)$-опукла відкрита множина E в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, яка не є $(n-1)$-опуклою — незв'язна.*

Теорема 4. *Кожна слабко $(n-1)$-опукла відкрита множина E в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, яка не є $(n-1)$-опуклою складається не менше ніж з трьох компонент.*

Означення 5. Скажемо, що відкрита множина $G \subset \mathbb{R}^n$ слабко m-напівопукла, якщо вона m-напівопукла відносно кожної точки $x \in \partial G$, яка належить до межі множини G.

Лема 6. *Кожна слабко 1-напівопукла відкрита множина на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$, яка не є 1-напівопуклою — незв'язна.*

Теорема 7. *Кожна слабко 1-напівопукла відкрита множина на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$, яка не є 1-напівопуклою складається не менше ніж з трьох компонент.*

Література

[1] Ю. Б. Зелінський. Варіації до задачі про тінь. *Збірник праць Інституту математики НАНУ*, **14**, № 1. : 163 – 170, 2017.

Використання демпфера пасивного типу для стабілізація малих коливань маятника змінної довжини

Каминіна Олена Володимирівна
(ДонНУ імені Василя Стуса, м.Вінниця, Україна)
E-mail: ol.kamynina@donnu.edu.ua

Пузирьов Володимир Євгенович
(ДонНУ імені Василя Стуса, м.Вінниця, Україна)
E-mail: v.puzyryov@donnu.edu.ua

Використання демпферів пасивного типу [1] широко застосовується в сучасній техніці, як для відносно простих систем (два - три ступеня свободи), так і досить складних (підвісні мости, висотні споруди, космічні супутники і орбітальні станції тощо). До переваг демпферів пасивного типу можна віднести їх відносну простоту, надійність і низькі енергетичні витрати. Типовим прикладом демпфера пасивного типу є динамічний абсорбер (dynamical absorber [2]) або динамічний поглинач коливань. Він є приєднаною масою, яка зазвичай моделюється як матеріальна точка і характеризується масою, жорсткістю і коефіцієнтом в'язкого тертя. Абсорбер може бути використаний для заспокоєння вільних коливань механічної системи, а також вібрацій, викликаних дією зовнішньої періодичної сили.

В роботі розглянуто задачу про пасивну стабілізацію малих коливань маятника змінної довжини, який є масою, що підвішено на пружині. В якості узагальнених координат взято кут між віссю маятника і напрямком сили тяжіння та безрозмірні величини, що характеризують, відповідно, відстані від муфти до нерухомої точки і абсорбера від муфти: $\eta = |OO_1|/l$, $u = |O_1O_3|/l$.

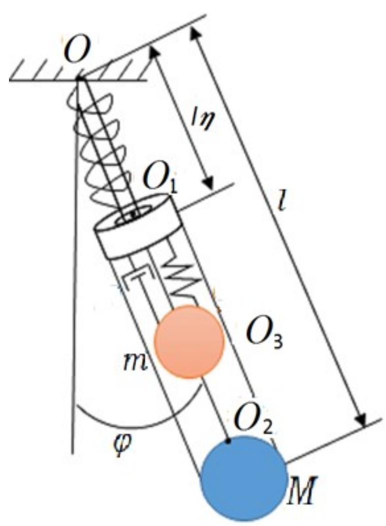


Рис. 0.1. Основна механічна система

З теоретичної точки зору, задача не є тривіальною, тому що дисипація енергії в системі не є повною, тому не можна застосувати класичні теореми Кельвіна-Четаєва. Більш того, лінійне наближення рівнянь збуреного руху є нейтральним, тобто має місце критичний випадок суто уявних коренів. Тому для розв'язання задачі був використаний прямий метод Ляпунова, а саме – підхід О. Я. Савченка [3] з модифікацією, запропонованій у роботі [4]. Була розглянута система

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \sum_{s=1}^{4} \xi_s C^{(s)} x, \qquad \frac{d\xi}{dt} = B\xi + \sum_{j=1}^{2} x_j D^{(j)} x, \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2)^T = (\varphi, -\varphi'/\omega)^T, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T = (\eta, \eta', u, u')^T,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \sqrt{\mu}, C^{(s)},$$

де $B, D^{(j)}$ – квадратні матриці відповідних порядків. Функцію Ляпунова для системи (1) обрано у вигляді

$$V(z, \overline{z}, \xi) = \alpha z\overline{z} + \beta V_*^{(2)}(\xi) + V^{(3)}(z, \overline{z}, \xi) + V^{(4)}(z, \overline{z}).$$

Тут $z = x_1 + ix_2$, α, β – деякі константи, $V^{(j)}(j = 2, 3, 4)$ – форма порядку j, причому $V_*^{(2)}$ є додатно визначеною. Коефіцієнти форми $V^{(3)}$ можна обрати таким чином, щоб повна похідна функції V за часом в силу системи (1) мала вигляд

$$\frac{dV}{dt} = \beta V'^{(2)}(\xi) + G(z\overline{z})^2 + V'^{(4)}(z, \overline{z}, \xi) + \dots,$$

де $V'^{(2)}$ – від'ємно визначена квадратична форма, а G – константа, яка залежить від параметрів системи (тобто коефіцієнтів правих частин рівнянь (1)). Встановлено, що ця константа є від'ємною для всіх припустимих значень параметрів.

Таким чином, якщо обрати константи α, β додатними, то при достатньо малому β функція V і її похідна задовольняють всім умовам теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість, отже стан рівноваги маятника стає асимптотично стійким. Цей результат є справедливим для довільних припустимих значень параметрів досліджуваної механічної системи, зокрема, для будь-яких співвідношень між частотами поздовжних і поперечних коливань маятника. Останній факт є важливим, тому що для маятника без абсорбера можливе виникнення вертикальних коливань, внаслідок чого може відбуватися «розгойдування» системи (виникає параметричний резонанс). Таким чином, використання динамічного абсорбера унеможливлює виникнення вертикальних незатухаючих коливань і усуває загрозу необмеженого зростання амплітуди збуреного руху.

Література

[1] Johnson C.D. *Design of Passive Damping Systems* // Journal of Vibration and Acoustics. – 117(B). – 1995. – Pp. 171–175.

[2] *Encyclopedia of Vibrations*, Ed. S. Braun, D. Evins, S.S. Rao, Academic Press, 2001.

[3] Савченко А.Я., Игнатьев А.О. *Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем.* – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

[4] Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Асимпотическая устойчивость положения равновесия двойного маятника с присоединенной массой* // Механика твердого тела. Вып. 44. 2014. С.75–86.

Кутова характеристика у метричному просторі

Кузьмич Валерій Іванович
(Херсонський державний університет, м. Херсон, Україна)
E-mail: `kuzmich@ksu.ks.ua`

У роботі В. Ф. Кагана [1, розділ XIX] детально вивчається поняття “прямолінійної розміщеності”, або “прямолінійного образу” точок довільного метричного простору [2, с. 527]. У продовження цих досліджень пропонується ввести поняття “плоскої розміщеності” множини точок метричного простору, як аналога площини у геометрії Евкліда. У аксіоматиці Д. Гільберта три різні точки визначають єдину площину [3 с. 3]. Для того щоб уникнути необхідності введення аксіом у метричному просторі, за ознаку плоскої розміщеності чотирьох різних точок простору можна вибрати умову рівності нолю об'єму тетраедра, вершинами якого є ці точки. При цьому логічно використати відому формулу Юнгіуса об'єму тетраедра за довжиною усіх його ребер [4, с. 99, 100]. Однак, використання цієї формули повязане зі значними аналітичними перетвореннями. У роботі [5] отримано аналог формули Юнгіуса, у якому для знаходження об'єму тетраедра використовуються кути при одній із його вершин. Із цього аналога можна отримати достатньо просту аналітичну умову плоскої розміщеності точок. У разі потреби перевірити існування тетраедра із заданими довжинами ребер, можна використати спеціальний калькулятор, розміщений за адресою `http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645`

Для реалізації вказаного вище підходу потрібно ввести поняття кута у довільному метричному просторі, як упорядкованої трійки елементів цього простору.

Означення 1. Нехай a, b і c - довільні точки метричного простору (X, ρ). Упорядковану трійку (a, b, c) цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці b, і позначати: $\angle(a, b, c)$. Пари точок (a, b) і (b, c), при цьому, будемо називати сторонами кута.

У якості числової характеристики кута можна вибрати значення його косинуса у геометрії Евкліда, як це пропонував О. Д. Александров [6, с. 36].

Означення 2. Нехай a, b і c - довільні точки метричного простору (X, ρ). Характеристикою кута $\angle(a, b, c)$, або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число $\varphi(a, b, c)$, що знаходиться за формулою:

$$\varphi(a,b,c) = \frac{\rho^2(a,b) + \rho^2(b,c) - \rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)}. \tag{1}$$

Метричний простір (X, ρ), у якому введено поняття кута за означенням 1, і його характеристику за формулою (1), будемо позначати Π.

Із означення 2 легко отримати означення прямолінійної розміщеності трьох точок простору Π.

Будемо казати, що точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, якщо $\varphi(a, b, c) = \pm 1$. При $\varphi(a, b, c) = 1$ кут $\angle(a, b, c)$ будемо називати нульовим, а при $\varphi(a, b, c) = -1$ - розгорнутим. Якщо ж виконується рівність $\varphi(a, b, c) = 0$, то кут $\angle(a, b, c)$ природно назвати прямим.

Для розгорнутого кута $\angle(a, b, c)$ можна ввести поняття суміжних кутів.

Означення 3. Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим, а точка d цього простору така, що виконується рівність $\varphi(a, b, d) = -\varphi(c, b, d)$. Тоді кути $\angle(a, b, d)$ і $\angle(c, b, d)$ будемо називати суміжними.

Використовуючи згадану вище формулу, отриману у роботі [5], можна дати наступне означення плоскої розміщеності чотирьох точок простору Π.

Означення 4. Будемо казати, що точки a, b, c, d простору Π плоско розміщені, якщо виконується рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Для довільної множини точок метричного простору природно дати наступне означення її плоскої розміщеності.

Означення 5. Будемо казати, що множина A точок простору Π плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені.

Із означення 4 можна отримати наступний критерій плоскої розміщеності точок.

Теорема 6. *Для того щоб точки a, b, c, d простору Π були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a,b,c) = \varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a,b,d))(1-\varphi^2(c,b,d))}. \tag{3}$$

У геометрії Евкліда рівність (3) має просте геометричне тлумачення: одна із вершина тетраедра знаходиться у площині основи, що утворена трьома іншими його вершинами. У цьому легко впевнитись помітивши, що рівність (3) є аналогом формул косинуса суми або різниці двух кутів.

Із означення 4 отримується наступна теорема, за допомогою якої зручно будувати у просторі Π плоско розміщені множини точок.

Теорема 7. *Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим.*

Для того, щоб точки a, b, c, d цього простору були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ були суміжними.

Із означення 4 отримується також наступна теорема, за допомогою якої можна у довільному метричному просторі встановити систему координат по відношенню до трьох фіксованих точок цього простору.

Теорема 8. *Нехай у метричному просторі Π кут $\angle(a,b,c)$ є прямим. Для того щоб точки a, b, c, d були плоско розміщені у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\varphi^2(a,b,d) + \varphi^2(c,b,d) = 1$.*

Такий підхід допускає окремі елементи неевклідової геометрії у просторі Π, що підтверджується конкретними прикладами.

У подальшому роботу слід продовжити у напрямі вивчення властивості паралельного розміщення множин точок довільного метричного простору, та встановлення співвідношень між поняттями перпендикулярності і паралельності множин точок простору, аналогічних класичним співвідношенням.

Література

[1] В. Ф. Каган. *Основания геометрии. Часть 2.* М.-Л.: Гостехиздат, 1956.

[2] В. Ф. Каган. *Очерки по геометрии.* Издательство Московского университета, 1963.

[3] Давид Гильберт. *Основания геометрии.* Петроград: Сеятель, 1923.

[4] Я. П. Понарин. *Элементарная геометрия. Часть 2.* Москва: МЦНМО, 2006.

[5] В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич. Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*, 36(249):55-64, 2012.

[6] А. Д. Александров. *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

Використання методу проектів в дистанційному навчанні на заняттях з вищої математики

Нужна Н.В.
(ОНАХТ, Одеса, Україна)
E-mail: lada5.00@ukr.net

В даний час в загальноосвітній системі дистанційного навчання активно застосовується метод проектів [2].

Метод проектів виник в двадцяті роки минулого століття в США в сільськогосподарських школах і був пізніше перенесено в загальноосвітню систему. Його засновниками вважаються американські вчені Джон Дьюї та його учень і колега Вільям Кілпатрік, які пропонували будувати навчання через практичну діяльність учня, спираючись на практичну затребуваність отриманих ним знань у подальшому житті.

В даний час метод проектів визначається як сукупність навчально-пізнавальних прийомів, які дозволяють вирішити будь-яку проблему в результаті самостійних дій учнів з обов'язковою презентацією цих результатів [1].

Переваги методу проектів:

- розвиток пізнавальних, творчих інтересів студентів;
- підвищує якість освітнього процесу;
- розвиває навички самоосвіти і контролю;
- дозволяє індивідуалізувати освітній процес;
- моделюється реальна технологічний ланцюжок: завдання — результат, що призводить до підвищення інтересу учнів до навчального процесу.

Недоліки методу проектів:

- суб'єктивність оцінювання робот;
- великий обсяг роботи для викладача і студента.

Література

[1] А. В. Хуторской. *Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения.* М.: Изд-во МГУ, (2003), 416 с.

[2] *Новые педагогические и информационные технологи в системе образования.* Учебное пособие для студентов вузов и системы повышения квалификации педагогических кадров под. ред. Е. С. Полат, (2001), с.66.

А-деформації та середній геодезичний скрут мінімальних поверхонь

Подоусова Т.Ю.
(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)
E-mail: tatyana_top@mail.ru

Вашпанова Н.В.
(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)
E-mail: vasha_nina@mail.ru

Нехай у E_3-просторі задана регулярна поверхня S класу C^3,яка гомеоморфна однозв'язній області G площини x^1Ox^2 і задана рівнянням $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$, де $(x^1, x^2) \in G$.

У роботі [1] доведено,що на будь-якій регулярній поверхні у довільній точці існує середній геодезичний скрут, який має представлення

$$2\tilde{H} = \frac{\rho_{11}g_{22} - 2\rho_{12}g_{12} + \rho_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

де $g_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}, (\alpha, \beta = 1, 2)$-коефіцієнти першої та четвертої квадратичних форм S відповідно.

Будемо досліджувати А-деформації мінімальної поверхні ($2H = 0, H$-середня кривина) зі стаціонарним середнім геодезичним скрутом.

Математичною моделлю цієї задачі є диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними відносно невідомої ненульової функції $\mu(x^1, x^2) \in C^2$:

$$\rho^{\alpha\beta} d^k_\beta \frac{\partial\mu}{\partial x^\alpha \partial x^k} + \left[\left(\rho^{\alpha\beta} d^k_\beta \right)_{,k} - \rho^{s\beta} d^k_\beta \Gamma^\alpha_{sk} \right] \frac{\partial\mu}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Тут $d^k_\beta = g_{\beta s} d^{sk}$, d^{sk}-елементи матриці, оберненої до $\|b_{ij}\|$, Γ^α_{sk}-символи Христофеля другого роду, $c^{ki} = g^{ks} g^{it} c_{st}, c_{st}$ - дискримінантний тензор, b_{ij} - коефіцієнти другої квадратичної форми S.

Справедлива наступна

Теорема. Мінімальна поверхня допускає нетривіальні А-деформації, що не змінюють середній геодезичний скрут. Тензори деформації залежать від однієї довільної ненульової функції $\mu(x^1, x^2)$ класу C^2.

Наслідок 1. При нетривіальній А-деформації зі стаціонарним середнім геодезичним скрутом зберігаються довжини ліній геодезичного скруту.

Наслідок 2. При нетривіальній А-деформації мінімальної поверхні, що зберігає середній геодезичний скрут, є стаціонарними довжини асимптотичних ліній.

Наслідок 3. Нетривіальна А-деформація мінімальної поверхні зі стаціонарним середнім скрутом буде нормальною А-деформацією.

Слід відзначити, що кожна А-деформація мінімальної поверхні, що не змінює середній геодезичний скрут, описує безмоментний напружений стан рівноваги оболонки з поверневим навантаженням

$$X = \rho^{\alpha\beta} \frac{\partial\mu}{\partial x^\alpha} \overline{r}_\beta.$$

Отримані результати проілюстровані на конкретних прикладах.

Література

[1] Т. Ю. Вашпанова., Л. Л. Безкоровайна. *LGT-сітка поверхні та її властивості.* Вісник Київського нац.ун-ту ім.Т.Шевченка, серія фіз.-мат. науки, вип.2: 7–11, 2010.

[2] Н. С. Кошляков. и др. *Уравнения в частных производных математической физики.* – М., «Высшая школа», 1970, 712 с.

Полярні потоки Морса-Смейла на неорієнтованих поверхнях малого роду

С. Л. Царук
(КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна)
E-mail: tsaruksvitlana33@gmail.com

О. О. Пришляк
(КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна)
E-mail: prishlyak@yahoo.com

Дослідженню топологічних властивостей полів Морса-Смейла прясвячено багато робіт, одна з яких [1]. В роботі [2] кожному градієнтно-подібному векторному полю Морса-Смейла поставлена у відповідність хордова діаграма і доведено, що поля топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх хордові діаграми ізоморфні. При зміні орієнтації всіх траєкторій, тобто при зміні поля на протилежне, отримаємо іншу хордову діаграму. Такі поля будуть траєкторно-еквівалентними. Нашою метою є дослідити, коли неізоморфні хордові діаграми відповідають траєкторно-еквівалентним полям. Ми даємо відповідь на це питання. Для цього використовуємо хордові діаграми, що залежать від напрямку руху за траєкторіями. Знайдено всі пари таких діаграм, що відповідають полям з протилежною орієнтацією для полів на поверхнях роду не більше чотирьох, а саме 42 пари.

Зокрема, на поверхнях

першого роду — 1 пара,
другого роду — 2 пари,
третього роду — 5 пар,
четвертого роду — 34 пари.

Література

[1] J. Palis. On Morse-Smale dynamical systems. *Topology,* 1996.
[2] О. Кадубовський. Класифікація векторних полів Морса-Смейла на двовимірних многовидах. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика, механіка.,* 2005.
[3] I.M.Ivanyuk, A.O.Prishlyak. Deformation of vector fields on non-orientable surfaces. *Bull.Taras Shevchenko Nat.Univ.Kiev, Ser.Phis-Math.,* N2, 2015, 5p.

Дерева і розмиті метричні простори

Олександр Савченко
(Херсонський державний аграрний університет, вулиця Стрітенська, 23, Херсон, Україна, 73000)
E-mail: `savchenko1960@rambler.ru`

Нагадаємо, що T-норма — це функція $T\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, яка має такі властивості:

(1) Комутативність: $T(a,b)=T(b,a)$;
(2) Монотонність: $T(a,b)\le T(c,d)$, якщо $a\le c$ і $b\le d$;
(3) Асоціативність: $T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$;
(4) Число 1 діє як одиниця: $T(a,1)=a$.

Зазвичай, T-норма позначається через $*$.

Трійка $(X,M,*)$ називається розмитим метричним простором [1], якщо X — довільна множина, $*$ — неперервна t-норма і M — розмита множина на $X^2\times(0,\infty)$, що задовольняє такі умови для всіх $x,y,z\in X$ і $s,t>0$:

(i) $M(x,y,t)>0$,
(ii) $M(x,y,t)=1$, якщо і тільки якщо $x=y$,
(iii) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$,
(iv) $M(x,y,t)*M(y,z,s)\le M(x,z,t+s)$,
(v) функція $M(x,y,-)\colon(0,\infty)\to[0,1]$ неперервна.

Метричний простір X називається $\mathbb{R}$-деревом, якщо для кожних $x,y\in X$ всі топологічні вкладення $\sigma\colon[0,1]\to X$ такі, що $\sigma(0)=x$, $\sigma(1)=y$, мають один і той же образ (геодезійний відрізок, що з'єднує x та y).

Метою доповіді є розмита метризація деяких просторів ймовірнісних та ідемпотентних мір на кореневих $\mathbb{R}$-деревах. Вона тісно пов'язана з розмитою ультраметризацією таких просторів (див. [2, 3]).

Література

[1] A. George and P. Veeramani. On some results of analysis for fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 90 : 365–368, 1997.
[2] О. Савченко. Функтори і розмиті ультраметрики, *Вісник Львівського університету, серія механіко-математична*, 72 : 255–262, (2010).
[3] A. Savchenko, M. Zarichnyi. Fuzzy ultrametrics on the set of probability measures, *Topology*, 48(2-4) : 130–136, (2009).

Про спеціальну геометрію дотичного розшарування ріманова простору

Синюкова Олена Миколаївна
(ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна)
E-mail: olachepok@ukr.net

Дослідження у межах інваріантної теорії наближень у рімановій геометрії та різних її узагальненнях за допомогою операцій повного ліфту і синектичного продовження [2] дозволили побудувати на дотичному розшаруванні $T(V^n)$ ріманова простору V^n, $n \in N$, кілька різних метрик і кілька різних об'єктів афінного зв'язку [1]. У першу чергу мова йде про метрики

$$ds_1^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha \widetilde{D}y^\beta;$$
$$ds_2^2 = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)dx^\alpha Dy^\beta,$$
$$ds_3^2 = g_{\alpha\beta}(x)\widetilde{D}y^\alpha \widetilde{D}y^\beta$$
$$ds_4^2 = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)\widetilde{D}y^\alpha \widetilde{D}y^\beta,$$

де $g_{\alpha\beta}(x)$ — компоненти метричного тензору базового ріманова простору V^n,

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y) = g_{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}y^\alpha y^\beta,$$
$$Dy^\alpha = dy^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)y^\beta dx^\gamma,$$
$$\widetilde{D}y^\alpha = dy^\alpha + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x;y)y^\beta dx^\gamma,$$

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ — компоненти афінного зв'язку базового ріманова простору V^n,

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x;y) = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) - \frac{1}{3}R^\alpha_{(\beta\gamma)\sigma}(x)y^\sigma,$$

$R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}(x)$, $R_{i\alpha\beta j}(x)$ — компоненти тензора Рімана і тензора кривини базового ріманова простору V^n відповідно.

Кожна з таких метрик породжує на $T(V^n)$ спеціальну геометрію, природним, але різним, чином пов'язану з інваріантною теорією наближень базового ріманова простору V^n.

Логічним наступним етапом подібних досліджень є побудова на $T(V^n)$ геометрії, у основу якої покладено метрику, що є певною лінійною комбінацією вищевказаних метрик і метрики простору V^n.

Досліджені певні геометричні властивості дотичного розшарування $T(V^n)$ з метрикою

$$ds_5^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta - \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)\widetilde{D}y^\alpha \widetilde{D}y^\beta.$$

Зокрема, розглянуті питання про те, у яких випадках простори $T(V^n)$ допускають нетривіальні (відмінні від афінних) геодезичні відображення у випадку, коли базовий простір V^n є простором постійної кривини.

Література

[1] Н. С. Синюков., Е. Н. Синюкова., Ю. А. Мовчан Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и её обощений *Изв.вузов. Математика*, 3(382) : 76–80, 1994.

[2] А. П. Широков. Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.* М., : 127–188, 1969.

Структура і мінімальні системи твірних силовських 2-підгруп знакозмінної групи і їх властивості

Скуратовський Р. В.
(Украина, Киев)
E-mail: ruslcomp@mail.ru

Ми досліджуємо системи твірних силовських 2-підгруп Syl_2A_n і Syl_2S_n знакозмінної групи A_n і симетричної групи S_n відповідно.

Нехай $X = \{0, 1\}$ та $X^{[k]}$ — скінченне бінарне k-рівневе дерево ($k \in \mathbf{N}$). Позначимо його корінь як нульовий рівень X^0. Помітимо кожну вершину з $X^{[k]}$ символом 0 чи 1 залежно від наявності вершинної перестановки в ній. Отримане таким чином вершинно-розмічене регулярне кореневе дерево є автоморфізмом з $AutX^{[k]}$. Група $Syl_2A_{2^k}$ ізоморфна підгрупі групи $AutX^{[k]}$ [1,2]. Автоморфізм з $AutX^{[k]}$ належить $Syl_2A_{2^k}$ [1,2], тоді і лише тоді, коли на передостанньому, тобто $(k-1)$-ому рівні, кількість міток 1 — парна [2]. Позначатимемо циклічну мультиплікативну групу порядку 2 як C_2.

Теорема 1. *Якщо G_k — максимальна 2-підгрупа групи $AutX^{[k]}$, що діє парними перестановками на $(k-1)$-ому рівні, то $G_k \simeq \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k-1} C_2 \ltimes (C_2)^{2^{k-1}-1}$ й ізоморфна $Syl_2A_{2^k}$.*

Теорема 2. *Мінімальна система твірних групи A_{2^k} складаєтьcя з k елементів.*

Нехай $n = 2^{k_0} + 2^{k_1} + \ldots + 2^{k_m}$, де $0 \leq k_0 < k_1 < \ldots < k_m$ і $m \geq 0$.

Теорема 3. *Якщо $m > 0$, то довільна мінімальна система твірних для Syl_2A_n має $\sum\limits_{i=0}^{m} k_i - 1$ твірних.*

Приклад 4. Система твірних для Syl_2A_{28} з 8 елементів: $(25, 27)(26, 28), (23, 24)(25, 26)$, $(17, 21)(18, 22)(19, 23)(20, 24), (17, 19)(18, 20), (15, 16)(17, 18)$, $(1, 9)(2, 10)(3, 11)(4, 12)(5, 13)(6, 14)(7, 15)(8, 16), (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8), (1, 3)(2, 4)$.

Теорема 5. *Якщо $n = 4l + 2$, $l \in \mathbb{N}$, то мінімальна система твірних групи Syl_2A_n має $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i$ елементів.*

Наведемо приклад, який підтверджує результат останньої теореми.

Приклад 6. Система твірних для Syl_2A_{14}, $Syl_2A_{14} \simeq Syl_2S_{12} \simeq Syl_2S_{2^2} \times Syl_2S_{2^3}$: $(11, 12)\,(13, 14)$, $(9, 11)\,(10, 12)$, $(7, 8)\,(9, 10)$, $(1, 5)\,(2, 6)\,(3, 7)\,(4, 8)$, $(1, 3)\,(2, 4)$.

Зауваження 7. Має місце ізоморфізм підгруп $Syl_2A_{4k+3} \simeq Syl_2A_{4k+2} \simeq Syl_2S_{4k+1} \simeq Syl_2S_{4k}$. Якщо $n = 2k + 1$, то $Syl_2A_n \simeq Syl_2A_{n-1}$ і $Syl_2S_n \simeq Syl_2S_{n-1}$.

Діагональною системою твірних S_d для $AutX^{[k]} \simeq Syl_2S_{2^k}$ назвемо таку систему, де i-ий твірний групи $Syl_2S_{2^k}$ має нетривіальні вершинні перестановки лише на i-му рівні, причому кількість таких вершинних перестановок — непарна. Потужність кожної системи твірних S_d рівна k і дорівнює рангу підгрупи $Syl_2S_{2^k}$, тобто найменшій кількості її твірних.

Загальна кількість S_d для $Syl_2S_{2^k}$ дорівнює 2^{2^k-k-1}. Всього мінімальних систем твірних для $Syl_2(S_{2^k})$ є $(2^k-1)(2^k-2)(2^k-2^2)\cdot\ldots\cdot(2^k-2^{k-1})2^{k(2^k-k-1)}$. Дійсно кількість базисів для фактор групи ${}^{G_k}/_{G_k^2} \simeq (C_2)^k$ рівна порядку $GL(k, \mathbb{F}_2)$ тобто $(2^k-1)(2^k-2)...(2^k-2^{k-1})$. Зауважимо, що G_k^2 співпадає з підгрупою Фраттіні (G_k). Оскільки у кожної системи твірних групи $(C_2)^k$є рівно $2^{k(2^k-k-1)} = \left(\frac{|G_k|}{2^k}\right)^k$ прообразів, де $\frac{|G_k|}{2^k}$ - кількість прообразів одного елемента з $(C_2)^k$, тому всього систем твірних є $(2^k-1)(2^k-2)(2^k-2^2)...(2^k-2^{k-1})2^{k(2^k-k-1)}$.

Загальна кількість мінімальних систем твірних для $Syl_2 A_{2^k}$ не менша ніж $2^{2^{k-1}-k-2}(2^{k-2})^2 + (2^{k-2})^2((2^{k-2}-1))^2$.

Це дозволяє побудувати криптосистему, яка реалізує блочний шифр, де раундовим ключем є номер алфавіту в якому ми подаємо підстановку, що відповідає тексту. Нехай $n_m = 2^{k_0} + 2^{k_1} + ... + 2^{k_m}$, де $k_0 < k_1 < ... < k_m$.

Відомо, що $Syl_2 S_n \simeq Syl_2 S_{2^{k_0}} \times Syl_2 S_{2^{k_2}} \times Syl_2 S_{2^{k_2}} \times ... \times Syl_2 S_{2^{k_m}}$.

Теорема 8. *Централізатор 2-підгрупи $Syl_2 S_{2^{k_i}}$, $i \leq m$ в силовській 2-підгрупі $Syl_2 S_n$ ізоморфний підгрупі $C_{S_n}(Syl_2 S_{2^{k_i}}) \simeq {}^{Syl_2 S_n}/_{Syl_2 S_{2^{k_i}}}$.*

Література

[1] Р. В. Скуратовский. *Минимальные системы образующих для венечноциклических групп, групп автоморфизмов графов Риба и фундаментальных групп орбит некоторых функций Морса*, 11 Летняя школа *Алгебра, Топологія, Аналіз*, с. 121–123, 2016.

[2] Skuratovskii R. V.*Corepresentation of a Sylow p-subgroup of a group S_n*. Cybernetics and systems analysis, : volume 1, pp. 27-41. 2009.

[3] Y. A. Drozd, R. V. Skuratovskii. *Generators and and relations for wreath products.* Ukr. Math. J., vol. 60., No. 7, pp. 1168–1171. 2008.

[4] R. V. Skuratovskii *Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups.* Source: https://arxiv.org/pdf/1702.05784.pdf, 2017.

Властивості спряжених функцій у гіперкомплексному просторі

Марія Стефанчук
(Інститут математики НАН України, м. Київ)
E-mail: stefanmv43@gmail.com

Будемо розглядати n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n = 1, 2, \dots$, що є прямим добутком n копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}^1 := \mathbb{H}$).

Означення 1. Функція $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ називається *багатозначною*, якщо образом точки $x \in \mathbb{H}^n$ є множина $f(x) \in \mathbb{H}$.

Область визначення такої функції будемо позначати через

$$E_f := \{x \in \mathbb{H}^n : \text{існує } y \in \mathbb{H},\, y = f(x)\}.$$

Означення 2. Багатозначна функція $f\colon E_f \to \mathbb{H}$ називається *лінійно опуклою*, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція l, така, що $y_0 = l(x_0)$ і $l(x) \bigcap f(x) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$, де через $\Gamma(f)$ позначено графік функції f.

Означення 3. *Лінійно угнутою* функцією називається така багатозначна функція f, для якої функція $\varphi = \mathbb{H} \setminus f$ — лінійно опукла.

Означення 4. *Багатозначною афінною функцією* називається функція, лінійно опукла і лінійно угнута одночасно, для якої знайдеться принаймні одна точка $x \in \mathbb{H}^n$, в якій кожна з множин $f(x) \cap \mathbb{H}$, $(f(x) \setminus \mathbb{H})$ є непорожньою.

Означення 5. Функцією, *спряженою* з f, називається функція, що задається рівністю

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f(x)). \tag{1}$$

Знайдемо функцію, спряжену до функцій $f^*(x)$.

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_y (\langle x, y\rangle - f^*(y)).$$

Приклад 6. Спряженою з багатозначною афінною функцією $f(x) = \langle x, y_0\rangle + f(\Theta)$, де $f(\Theta)$ — множина, є функція

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - \langle x, y_0\rangle - f(\Theta)) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y - y_0\rangle - f(\Theta)) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{H}^o \setminus (-f(\Theta)), & \text{якщо } y = y_0, \\ \infty, & \text{якщо } y \neq y_0. \end{cases}$$

Теорема 7. *Для кожної функції $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ справедливе включення $f \subset f^{**}$.*

Означення 8. Багатозначна функція $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ називається *відкритою (відповідно, замкненою чи компактною)*, коли її графік є відкритою (відповідно, замкненою чи компактною) множиною в $\mathbb{H}^{n+1}$.

Теорема 9. *Функція, спряжена до відкритої функції, буде замкненою та лінійно опуклою.*

Означення 10. Лінійно опукла функція називається *власною*, якщо хоча б для одного x виконується співвідношення: $f(x) \bigcap \mathbb{H} \neq \emptyset$ і для всіх x має місце нерівність: $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$.

Теорема 11. *Нехай f — власна лінійно опукла функція. Тоді f^* — власна функція.*

Наступна теорема є гіперкомплексним аналогом теореми Фенхеля-Моро.

Теорема 12. *Нехай багатозначна функція* $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ *така, що* $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$ *для всіх* $x \in \mathbb{H}^n$. *Тоді* $f^{**} = f$ *тоді і тільки тоді, коли* f *є лінійно опуклою.*

Означення 13. Функція f називається *однорідною*, якщо $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всіх скалярів $\lambda \in \mathbb{H} \setminus 0$.

Означення 14. Функція

$$W_E(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in E} \langle x, y \rangle$$

називається *опорною функцією* множини $E \subset \mathbb{H}^n$.

Теорема 15. *Нехай* $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \to \mathbb{H}$ *є власною лінійною опуклою однорідною функцією і* $f(\Theta) = \mathbb{H}^o \setminus 0$. *Тоді* f *є опорною функцією деякої множини.*

Наслідок 16. *Якщо однорідна лінійно опукла функція* $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \to \mathbb{H}$ *є відмінною від афінної, то*

$$f^*(y) = \delta(y|E_{f^*}).$$

Теорема 17. *Якщо* $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \to \mathbb{H}$ *— однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то*

$$f(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in E_{f^*}} \langle x, y \rangle.$$

Означення 18. Нехай $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}, \alpha \in A$, є багатозначними функціями. Функцію

$$(\bigcup_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcup_\alpha f_\alpha(x)$$

назвемо *об'єднанням функцій* f_α, а

$$(\bigcap_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcap_\alpha f_\alpha(x)$$

— їх *перетином.*

Для спряжених функцій має місце теорема двоїстості.

Теорема 19. *Нехай* $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}, \alpha \in A$, *є багатозначними функціями. Тоді виконується рівність*

$$\left(\bigcup_\alpha f_\alpha\right)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$

Література

[1] М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 12(3) : 225–235, 2015.

Про симетричні $*$-поліноми на просторі C^n

Струтинський Михайло Михайлович
(Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника)
E-mail: `strutinskii1991@gmail.com`

Основна теорема про симетричні поліноми від скінченної кількості змінних стверджує, що кожен такий поліном можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементарних симетричних поліномів. Природним узагальненням поліномів від комплексних змінних є $*$-поліноми.

Відображення $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ вигляду

$$P((z_1, \ldots, z_n)) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N} \sum_{l_1,\ldots,l_n=0}^{N} a_{k_1,\ldots,k_n,l_1,\ldots,l_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} \overline{z}_1^{l_1} \ldots \overline{z}_n^{l_n},$$

де $N \in \mathbb{N}, a_{k_1,\ldots,k_n,l_1,\ldots,l_n} \in \mathbb{C}$, називають $*=$поліномом.

$*$-Поліном P називають симетричним, якщо

$$P((z_1, \ldots, z_n)) = P((z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}))$$

для всіх $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ і для всіх перестановок σ на множині $\{1, \ldots, n\}$.

У доповіді буде розглянуто питання опису спектра алгебри всіх симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^n$.

Література

[1] *Vasylyshyn T. V.*Polarization formula for(p, q)-polynomials on a complex normed space/T.V.Vasylyshyn, A.V.Zagorodnyuk//Methods of Functional Analysis and Topology. —2011. —V.17, №1. —P.75-83.

[2] *Zagorodnyuk A.V., Kravtsiv V. V.*Symmetric polinomials on the product of Banach spaces A.V.Zagorodnyuk, Kravtsiv V. V. //Carpathian Mathematical Publications.— 2010. —V.2, №1. —P. 59-71.

Про нескінченно малу конформну деформацію мінімальних поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини

Юлія Федченко
(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)
E-mail: fedchenko_julia@ukr.net

Досліджуються нескінченно малі конформні деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі [1], [2]. Для таких деформацій поверхонь знайдено в явному вигляді представлення тензорних полів $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{T}{}^{\beta\alpha}$, де T^{α} — похідної вектора зміщення

$$\overline{U}_i = c_{i\alpha}\left(\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_{\beta} + c_{i\alpha}T^{\alpha}\overline{n}.$$

Тут φ — функція конформності, $c_{i\alpha}$ — дискримінантний тензор, $c^{\alpha\beta} = g^{\alpha i}g^{\beta j}c_{ij}$.

Теорема 1. *Для того, щоб поверхня S $(K \neq 0)$ класу C^3 допускала нескінченно малу конформну деформацію зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі, необхідно і достатньо, щоб на поверхні існували функції t, φ, які задовольняють рівняння*

$$\nabla_j(t_{\alpha}d^{k\alpha}) - \nabla_j(\varphi_{\alpha}c^{\alpha\beta}d^k_{\beta}) + b^k_j t + \varphi b_{\alpha j}c^{\alpha k} = 0.$$

Тоді тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^s похідної вектора зміщення $\overline{U}_i$ мають вигляд

$$\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = tg^{\alpha\beta}, T^s = t_{\alpha}d^{s\alpha} - \varphi_{\alpha}c^{\alpha\beta}d^s_{\beta}.$$

Теорема 2. *Якщо поверхня S $(K \neq 0)$ класу C^3 допускає нетривіальну нескінченно малу конформу деформацію зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини в будь-якому напрямі, то така поверхня є мінімальною $H = 0$.*

Теорема 3. *Якщо мінімальна поверхня S $(H = 0, K \neq 0)$ класу C^3 допускає нескінченно малу конформу деформацію зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини в будь-якому напрямі, тоді деформована поверхня також є мінімальною.*

Теорема 4. *Якщо мінімальна поверхня S $(H = 0, K \neq 0)$ класу C^3 допускає нескінченно малу конформу деформацію зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини в будь-якому напрямі при якій зберігається гаусова кривина поверхні, то ця деформація є згинанням.*

В якості прикладу, досліджено мінімальну поверхню обертання — катеноїд.

Теорема 5. *Катеноїд допускає нетривіальну нескінченно малу конформну деформацію зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини в будь-якому напрямі.*

На основі теореми 3 маємо, що при даній деформації середня кривина деформованого катеноїда також дорівнює нулеві.

Література

[1] Л. Л. Безкоровайная. Деформация поверхности со стационарным отклонением от касательной плоскости. *Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе-2006"*: 34–35, 2006.

[2] Ю. С. Федченко. Бесконечно малые конформные деформации поверхностей со стационарным отклонением от касательной плоскости. *Математика, информатика, их приложения и роль в образовании: материалы Третьей российской школы-конференции с международным участием для молодых ученых: статьи, обзоры, тезисы докладов*: 145–149, 2013.

Поверхня обертання та її квазіареальна деформація з обмеженням

Юлія Хомич
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

Продовжуємо розглядати квазіареальну нескінченно малу деформацію поверхні $S \in C^3$ з полем зміщення $\overline{U}$:
$$\overline{r}^*(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2),$$
при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. Нехай частинні похідні $\overline{U}_i$ представлені у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\overline{r}_i, \overline{n}$ через симетричне тензорне поле $T^{\alpha\beta} \in C^2$, контраваріантний вектор $T^\alpha \in C^2$ і функцію $\mu \in C^2$:
$$\overline{U}_i = \left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta} - \mu\delta_i^\beta\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}.$$
Відомо [1], що така деформація однозв'язної поверхні ненульової гаусової кривини існує тоді і лише тоді, коли $T^{\alpha\beta}$ та μ можна подати у явному вигляді
$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(T^\alpha_{,j}d^{j\beta} + T^\beta_{,j}d^{j\alpha}\right),\ \mu = \frac{1}{2}T^\alpha_{,j}d^{j\beta}c_{\beta\alpha},$$
а тензор T^α є розв'язком системи рівнянь
$$T^\alpha_{,\alpha i} + T^\alpha_{,j}d^{j\beta}_{,\alpha}b_{\beta i} + T^\beta b_{\beta i}2H = 0. \tag{1}$$
Функція μ виражає закон змінювання елемента площі поверхні при її малій деформації, c_{ij} – дискримінантний тензор, δ^i_j – символи Кронекера, b_{ij} – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні, d^{ij} – тензор, обернений до тензора b_{ij}, H – середня кривина.

Надалі проводимо дослідження системи рівнянь (1) для поверхні обертання ненульової гаусової кривини
$$\overline{r}(x^1, x^2) = \{x^1\cos x^2,\ x^1\sin x^2,\ f(x^1)\}.$$
Знайдено розв'язок цієї системи двох рівнянь з двома невідомими функціями
$$T^1 = 0,\ T^2 = e^{\int\frac{(x^1f''-f'-f'^3)^2+x^1f'^2f''(f'+f'^3+x^1f'')}{x^1f'(1+f'^2)(x^1f''-f'-f'^3)}dx^1}. \tag{2}$$
При цьому тензор деформації $T^{\alpha\beta}$ та функція μ набувають вигляду:
$$T^{11} = T^{22} = 0,\ T^{12} = \frac{f'^2+f'^4+x^1f'f''}{2\sqrt{1+f'^2}(f'+f'^3-x^1f'')}e^{\int\frac{(x^1f''-f'-f'^3)^2+x^1f'^2f''(f'+f'^3+x^1f'')}{x^1f'(1+f'^2)(x^1f''-f'-f'^3)}dx^1}, \tag{3}$$
$$\mu = \frac{x^1(2x^1f''-2f'-f'^3+f'^5+x^1f'^2f'')}{2f'(x^1f''-f'-f'^3)}e^{\int\frac{(x^1f''-f'-f'^3)^2+x^1f'^2f''(f'+f'^3+x^1f'')}{x^1f'(1+f'^2)(x^1f''-f'-f'^3)}dx^1}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Поверхня обертання ненульової гаусової кривини допускає квазіареальну нескінченно малу деформацію, при якій її відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. Тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, T^α та функція μ мають вигляд (3), (2) та (4) відповідно.*

Для прикладу розглянуто квазіареальну деформацію з заданим обмеженням поверхні еліптичного параболоїда: $\overline{r}(x^1, x^2) = \{x^1\cos x^2,\ x^1\sin x^2,\ \frac{x^1}{2}\}$, і знайдено у явному вигляді $\overline{U}$.

Теорема 2. *Поверхня еліптичного параболоїда допускає квазіареальну нескінченно малу деформацію, при якій відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі з полем зміщення*
$$\overline{U}(x^1, x^2) = \{\frac{-c\cos x^2}{x^1},\ \frac{-c\sin x^2}{x^1},\ \frac{c}{2}((x^1)^2 + 4\ln x^1 - 1)\} + \overline{C},$$
де c – довільна стала, $c \neq 0$, а $\overline{C}$ – сталий вектор. При цьому закон змінювання елемента площі поверхні має вигляд $\mu = -\frac{c}{2}$.

Література

[1] Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич. *Аналітичне моделювання однієї задачі квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні*// Proc. Intern. Geom. Center, №8(2), С. 34-42, (2015).

Інфінітезимальні конгармонічні перетворення рімanoвих просторів ненульової скалярної кривини

О. Є. Чепурна
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: chepurna67@gmail.com

Є. Кулешова
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail:

Конгармонічні відображення були вперше розглянуті у [1]. Користуючись тим, що у [2] доведено, що відображення є конгармонічним тоді і тільки тоді, коли зберігається добуток Rg_{ij}, визначимо як конгармонічні такі конформні перетворення, для яких

$$\mathfrak{L}_\xi(Rg_{ij}) = 0. \tag{1}$$

Нехай, (M, g) є рімановим многовидом. У випадку, коли $\forall x \in M^n$ виконується $R \neq 0$, система рівнянь для вектора ξ, що породжує перетворення, матиме наступний вигляд.

$$\begin{array}{l} 1)\ \xi_{i,j} = \xi_{ij}; \\ 2)\ \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = -\big(\xi^\alpha \nabla_\alpha(ln|R|)\big)g_{ij}; \\ 3)\ \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} - \frac{1}{2}\big(\nabla_k\big(\xi^\alpha\nabla_\alpha(ln|R|)\big)g_{ij} + \nabla_j\big(\xi^\alpha\nabla_\alpha(ln|R|)\big)g_{ik} - \nabla_i\big(\xi^\alpha\nabla_\alpha(ln|R|)\big)g_{jk}\big). \end{array} \tag{2}$$

Доведені такі теореми.

Теорема 1. *Якщо на рімановому многовиді $(M^n,)$ контраварінтне аналітичне векторне поле ξ породжує інфенітезимальні конгармонічні перетворення, то тензор*

$$\begin{aligned} Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} &- \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\nabla_i\nabla_k(ln|R|) + \frac{1}{4}\nabla_i(ln|R|)\nabla_k(ln|R|) - \frac{1}{8}||\nabla(ln|R|)||^2 g_{ik}\big) \\ &+\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j(ln|R|) + \frac{1}{4}\nabla_i(ln|R|)\nabla_j(ln|R|) - \frac{1}{8}||\nabla(ln|R|)||^2 g_{ij}\big) \\ &-(\frac{1}{2}\nabla^h\nabla_j(ln|R|) + \frac{1}{4}\nabla^h(ln|R|)\nabla_j(ln|R|) - \frac{1}{8}||\nabla(ln|R|)||^2\delta^h_j)g_{ik} \\ &+(\frac{1}{2}\nabla^h\nabla_k(ln|R|) + \frac{1}{4}\nabla^h(ln|R|)\nabla_k(ln|R|) - \frac{1}{8}||\nabla(ln|R|)||^2\delta^h_k)g_{ij}. \end{aligned} \tag{3}$$

є інваріантним відносно цих перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi Q^h_{ijk} = 0. \tag{4}$$

Поряд з тензором (3) інваріантним є, також, тензор конгармонічної кривини(див. [2]).

Теорема 2. *Для того щоб многовид (M^n, g) допускав наявність групи конгармонічних перетворень, необхідно та достатньо, щоб система умов інтегровності (4) та їх продовжень, була сумісною. Тоді, многовид (M^n, g) допускає наявність r-параметричної групи, $r = \frac{n(n+1)}{2} - k$, де n та k є відповідно розмірністю многовиду, та рангом системи умов інтегровності та їх продовжень. У випадку, якщо умова інтегровності задовільняється тотожно, розв'язок системи (2) залежатиме від $r = \frac{n(n+1)}{2}$ параметрів.*

Література

[1] Y. Ishi. On conharmonic transformation. *Tensor N. S.*, 7: 73-80 1957.
[2] Byung Hak Kim, In Bae Kim, Sun Mi Lee. Conharmonic transformation and critical riemannian metrics. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 12(2):347–354, 1997.

Конформно-голоморфно-проективні перетворення локально конформно-келерових многовидів

Є. В. Черевко
(Одеський національний економічний університет, ул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

В. Є. Березовський
(Уманський національний університет садівництва, ул.Інститутська, б. 1, м.Умань, Черкаська обл., 20305, Україна)
E-mail: berez.volod@rambler.ru

У роботі [2], розвиваючи ідеї статті [2] було введено конформно-голоморфно-проективні перетворення. Система рівнянь, які на ЛКК-многовиді (M^n, J, g) визначають конформно-голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення із збереженням комплексної структури має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \xi_{i,j} = \xi_{ij},\\
&2)\quad \rho, i = \rho_i,\\
&3)\quad \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\Big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} g_{ik} - \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i} g_{jk} - \omega_i \mathfrak{L}_\xi g_{jk} + \omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha}) g_{jk}\Big)\\
&\qquad + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ki} - \rho_t J^t_k J_{ji},\\
&4)\quad \rho_{i,j} = \frac{1}{2}\omega^t\rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i\omega_j - \frac{1}{2}\rho_j\omega_i +\\
&\qquad + \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\Big),\\
&5)\quad \mathfrak{L}_\xi\, J^i_j = \xi^k\nabla_k J^i_j - J^\alpha_j\nabla_\alpha\xi^i + J^i_\alpha\nabla_j\xi^\alpha = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Нами доведені такі теореми

Теорема 1. *Якщо на ЛКК-многовиді (M^n, g, J) контраварінтне аналітичне векторне поле ξ породжує інфенітезимальні конформно-голоморфно-проективні перетворення, то об'єкт*

$$\Pi^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \frac{1}{2}\omega^h g_{ij} - \frac{1}{n+2}\Big(\big(\Gamma^s_{js} + \omega_j\big)\delta^h_i + \big(\Gamma^s_{is} + \omega_i\big)\delta^h_j + \big(\Gamma^s_{ts} - \frac{n}{2}\omega_t\big)J^t_i J^h_j + \big(\Gamma^s_{ts} - \frac{n}{2}\omega_t\big)J^t_j J^h_i\Big)$$

є інваріантним відносно цих перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi \Pi^h_{ij} = 0.$$

Теорема 2. *Тензор*

$$
\begin{aligned}
P^h_{ijk} = {} & R^h_{ijk} - \delta^h_k\big(2\omega_{i,j} + \omega_i\omega_j - ||\omega||^2 g_{ij}\big) + \delta^h_j\big(2\omega_{i,k} + \omega_i\omega_k - ||\omega||^2 g_{ik}\big) -\\
& - \frac{1}{2}\big(\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{2}\omega^h\omega_k\big) g_{ij} + \frac{1}{2}\big(\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{2}\omega^h\omega_j\big) g_{ik} -\\
& - \frac{1}{n+2}\Bigg(\delta^h_k\big(R_{ij} - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big) - \delta^h_j\big(R_{ik} - \frac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\big) +\\
& + (J^h_k J^t_i - J^h_i J^t_k)\Big(R_{tj} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,j} + \frac{\omega_t\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tj}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\Big) -\\
& - (J^h_j J^t_i - J^h_i J^t_j)\Big(R_{tk} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,k} + \frac{\omega_t\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tk}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\Big)\Bigg),
\end{aligned}
$$

є інваріантним відносно інфенітезимальних конформно-голоморфно-проективних перетворень ($\mathfrak{L}_\xi P^h_{ijk} = 0$).

Теорема 3. *Для того щоб ЛКК-многовид* (M^n, J, g) *допускав наявність групи конформно-голоморфно-проективних перетворень, необхідно та достатньо, щоб система умов інтегровності*

$$\mathfrak{L}_\xi P^h_{ijk} = 0,$$

$$\rho_t P^t_{ijk} = \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi P_{ijk},$$

та їх продовжень, була сумісною. Тоді, ЛКК-многовид (M^n, J, g) *допускає наявність* r*-параметричної групи,* $r = 2(m+1)^2 - 1 - k$*, де* m *та* k *є відповідно комплексною розмірністю многовиду, та рангом системи умов інтегровності та їх продовжень. У випадку, якщо умови ці інтегровності задовільняються тотожно, розв'язок системи* (1) *залежатиме від* $r = 2(m+1)^2 - 1$ *параметрів.*

Тензор P_{ijk} визначено формулою

$$\begin{aligned} P_{ijk} = \nabla_k\Big(R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\Big) - \\ - \nabla_j\Big(R_{ik} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,k} + \frac{\omega_i\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ik}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(\delta^t_i\omega_k + \delta^t_i\omega_k - \omega^t g_{ik}\Big)\Big(R_{tj} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,j} + \frac{\omega_t\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tj}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\Big) - \\ - \frac{1}{2}\Big(\delta^t_i\omega_j + \delta^t_i\omega_j - \omega^t g_{ij}\Big)\Big(R_{tk} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,k} + \frac{\omega_t\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tk}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\Big). \end{aligned}$$

Теорема 4. *На компактному ЛКК-многовиді* $\{M_n, J, g\}$ *векторне поле* ξ*, що генерує нетривіальні конформно-голоморфно-проективні перетворення, є контраваріантним майже аналітичним.*

Література

[1] J. Mikeš, H. Chuda, I. Hinterleitner. Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. Vol. 11, No. 5, 2014 8 p.

[2] Є. В. Черевко. Голоморфно-проективні перетворення та конформно-келерові многовиди. *Proc. Inter. Geom. Center*. v.4, № 1, 2016.

Field equations from geometric Killing spinors

Özgür Acık
(Ankara University Department of Physics, Ankara, Turkey)
E-mail: ozacik@science.ankara.edu.tr

Spinors, with different and more general properties from vectors or tensors, represent fermionic fields or particles on their own. Because one can square them to construct differential forms they also have the power to represent bosonic objects in contrary to tensor fields. Spacetime spinor fields are characterized by the differential equations that they satisfy which are based on the spinor connection that is used for illustrating the dynamics of fermionic fields and the motion of fermionic particles in these fields apriori. Killing fermions are defined as the spinors satisfying the geometric Killing spinor equation

$$\nabla_X \psi = \lambda \widetilde{X}.\psi$$

and from our point of view are thought as physical more than geometrical. In a recent work [1] we worked out some properties of bilinears generated by twistors and Killing spinors. The Killing spinor case, accompanied by a data set, was more sophisticated and rich. All possible outcomes obtainable from the Killing spinor bilinears were determined by the restrictive reality conditions imposed on them for physical reasons. We then uncovered the *primitive set* of generating equations and they were seen to be

$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_p = 2\lambda\, e_a \wedge (\psi\overline{\psi})_{p-1}$$
$$\nabla_{X_a}(\psi\overline{\psi})_{p_*} = 2\lambda\, i_{X_a}(\psi\overline{\psi})_{p_*+1},$$

giving rise to the *principal set*

$$d(\psi\overline{\psi})_p = 0, \qquad d^\dagger(\psi\overline{\psi})_p = -2\lambda(n-p+1)(\psi\overline{\psi})_{p-1};$$
$$d(\psi\overline{\psi})_{p_*} = 2\lambda(p_*+1)(\psi\overline{\psi})_{p_*+1}, \qquad d^\dagger(\psi\overline{\psi})_{p_*} = 0.$$

Here p_* means that it has a different parity than p, i.e. $p_* + p$ is always odd and $0 \leq p, p_* \leq n$, n is the dimension of spacetime. In this talk [2] we will show that these equations can be used to generate interestingly the Klein-Gordon, Maxwell-like, Proca, Duffin-Kemmer-Petiau, Kähler and Rarita-Schwinger equations in curved spacetimes in a systematic manner. The Rarita-Schwinger case is based on the tool of tensor spinors over spacetime, that are higher dimensional half-spin representations of the Clifford group. When obtaining the correspondent field equations we also obtained a constraint that has to be satisfied which is directly related to the $3-\psi$ rule that appears in supersymmetric theories.

Rerefences

[1] Özgür Açık and Ümit Ertem, *Higher degree Dirac currents of twistor and Killing spinors in supergravity theories*, Class. Quantum Grav. **32**, 175007, 2015.
[2] Özgür Açık, *Field equations from Killing spinors*, Ankara University preprint, 2017.

Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms on Finsler manifolds

Elena Afanas'eva
(Institute of Applied Mathematics and Mechanics, 1 Dobrovol'skogo St., Slavyansk 84100, Ukraine)
E-mail: es.afanasjeva@yandex.ru

By a *Finsler manifold* $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geq 2$, we mean a smooth manifold of class C^∞ with defined Finsler structure $\Phi(x,\xi)$, where $\Phi(x,\xi) : T\mathbb{M}^n \to \mathbb{R}^+$ is a function satisfying the following conditions:

1) $\Phi \in C^\infty(T\mathbb{M}^n \setminus \{0\})$;
2) for all $a > 0$ hold $\Phi(x, a\xi) = a\Phi(x,\xi)$ and $\Phi(x,\xi) > 0$ for $\xi \neq 0$;
3) the $n \times n$ Hessian matrix $g_{ij}(x,\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi^2(x,\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ is positive defined at every point of $T\mathbb{M}^n \setminus \{0\}$, cf. [1].

By the *geodesic distance* $d_\Phi(x,y)$ we mean the infimum of lengths of piecewise-smooth curves joining x and y in $(\mathbb{M}^n, \Phi)$, $n \geq 2$.

Later we consider the Finsler structure of a type $\widetilde{\Phi}(x,\xi) = \frac{1}{2}(\Phi(x,\xi) + \Phi(x,-\xi))$ thereby obtaining a Finsler manifold $(\mathbb{M}^n, \widetilde{\Phi})$ with symmetrized (reversible) function $\widetilde{\Phi}$. Clearly, if $\widetilde{\Phi}$ is reversible, then the induced distance function $d_{\widetilde{\Phi}}$ is reversible, i.e., $d_{\widetilde{\Phi}}(x,y) = d_{\widetilde{\Phi}}(y,x)$, for all pairs of points $x, y \in \mathbb{M}^n$, see [2]. It is also known that the reversible Finsler metric coincides with the Riemannian one, see, e.g., [3].

Definition 1. The *modulus* of the family Γ is defined by

$$M(\Gamma) = \inf \int\limits_D \rho^n(x)\, d\sigma_{\widetilde{\Phi}}(x),$$

where the infimum is taken over all nonnegative Borel functions ρ such that the condition

$$\int\limits_\gamma \rho \widetilde{\Phi}(x, dx) = \int\limits_\gamma \rho ds_{\widetilde{\Phi}} \geq 1$$

holds for any curve $\gamma \in \Gamma$. The functions ρ, satisfying this condition, are called *admissible* for Γ, cf. [1].

Definition 2. Let D and D' be domains on the Finsler manifolds $(\mathbb{M}^n, \widetilde{\Phi})$ and $(\mathbb{M}^n_*, \widetilde{\Phi}_*)$, $n \geq 2$, respectively, and let $Q : \mathbb{M}^n \to (0,\infty)$ be a measurable function. A homeomorphism $f : D \to D'$ is *ring Q-homeomorphism at a point* $x_0 \in \overline{D}$, if

$$M\left(\Delta(f(C), f(C_0); D')\right) \ \leq \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n\left(d_{\widetilde{\Phi}}(x, x_0)\right) d\sigma_{\widetilde{\Phi}}(x) \qquad (1)$$

holds for any geodesic ring $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \infty$, any two continua (compact connected sets) $C \subset \overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap D$ and $C_0 \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$ and each Borel function $\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$, such that $\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \eta(r) dr \geq 1$. We say that f is a *ring Q-homeomorphism* in D, if (1) holds for all points $x_0 \in \overline{D}$.

Definition 3. We say that the boundary D is *strongly accessible at a point* $x_0 \in \partial D$, if for any neighborhood U of x_0, there are a compactum $E \subset D$, a neighborhood $V \subset U$ of x_0 and a number $\delta > 0$, such that $M(\Delta(E, F; D)) \geq \delta$ for any continuum F in D, intersecting ∂U and ∂V.

Theorem 4. *Let D and D' be domains in $(\mathbb{M}^n, \widetilde{\Phi})$ and $(\mathbb{M}^n_*, \widetilde{\Phi}_*)$, $n \geq 2$, respectively. Assume that D is locally connected at a point $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ is compact and the boundary of D' is strongly accessible. If a measurable function $Q : \mathbb{M}^n \to (0,\infty)$ satisfies*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\sigma_{\widetilde{\Phi}}(x)}{d_{\widetilde{\Phi}}(x,x_0)^n} \ = \ o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \quad as \quad \varepsilon \to 0, \qquad (2)$$

where $D(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in D : \varepsilon < d_{\widetilde{\Phi}}(x,x_0) < \varepsilon_0\}$ *for* $\varepsilon_0 < d(x_0) = \sup\limits_{x\in D} d_{\widetilde{\Phi}}(x,x_0)$, *then any ring* Q*-homeomorphism* $f : D \to D'$ *can be continuously extended to* x_0 *on* $(\mathbb{M}^n_*, \widetilde{\Phi}_*)$.

Corollary 5. *The assertion of Theorem 4 is true if the singular integral*

$$\int \frac{Q(x)d\sigma_{\widetilde{\Phi}}(x)}{d_{\widetilde{\Phi}}(x,x_0)^n} \tag{3}$$

converges in a neighborhood of the point x_0 *in the sense of principal value.*

Rerefences

[1] Yu. V. Dymchenko. The relation between the capacity of a condenser and the module of a family of separated surfaces in Finsler spaces. (Russian) *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, Analiticheskaya Teoriya Chisel i Teoriya Funktsii, 418(28): 74–89, 2013.

[2] X. Cheng and Z. Shen. *Finsler geometry. An approach via Randers spaces.* Heidelberg: Science Press Beijing, Beijing; Springer, 2012.

[3] D. Bao, S. Chern and Z. Shen. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 200. New York: Springer-Verlag, 2000.

Normal numbers with respect to the Cantor series expansions and possible applications in algebraic geometry

Dylan Airey
(Department of Mathematics, University of Texas at Austin, 2515 Speedway, Austin, TX 78712-1202, USA)
E-mail: dylan.airey@utexas.edu

Bill Mance
(Institute of Mathematics of Polish Academy of Science, Śniadeckich 8, 00-656 Warsaw, Poland)
E-mail: Bill.A.Mance@gmail.com

We will discuss basic properties of normal numbers for the Cantor series expansions and a recent result of D. Airey and B. Mance. Using ideas introduced in this paper, it may be possible to show that information about algebraic varieties is encoded in the structure of sets of normal numbers. We will outline this idea and the barriers one may encounter in finishing it.

Killing vector fields and geometry of submersions

Annaev Nuriddin Uzoq o'g'li
(Architecture and Construction Institute,Tashkent,Uzbekistan)
E-mail: nuriddin.annayev.91@mail.ru

Let M be a smooth Riemannian manifold of dimension n with the Riemannian metric g, ∇ – the Levi-Civita connection, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - inner product defined by the Riemannian metric g.

We denote by $V(M)$ the set of all smooth vector fields defined on M, through a $[X, Y]$ Lie bracket of vector fields $X, Y \in V(M)$. The set $V(M)$ is a Lie algebra with Lie bracket.

Throughout the paper, the smoothness means smoothness of a class C^{∞}.

Definition 1. Differentiable mapping $\pi : M \to B$ of a maximal rank, where B is smooth manifold of dimension m, $(n > m)$, is called submersion.

By the theorem on the rank of a differentiable function for each point $p \in B$ the full inverse image $\pi^{-1}(p)$ is a submanifold of M dimension $k = n - m$. Thus submersion $\pi : M \to B$ generates a foliation F on M of dimension $k = n - m$, whose leaves are connected components of submanifolds $L_p = \pi^{-1}(p), p \in B$.

To the study of the geometry of submersions were devoted numerous papers ([1]–[5]), in particular in paper [3] derived the fundamental equations of submersion.

Let F be a foliation of dimension k, where $0 < k < n$. We denote by L_p leaf of foliation F, passing through a point $q \in M$, where $\pi(q) = p$, by T_qF tangent space of leaf L_p at the point $q \in L_p$, by $H(q)$ orthogonal complement of subspace T_qF. As result arise subbundle's $TF = \{T_qF\}$, $TH = \{H(q)\}$ of the tangent bundle TM and we have an orthogonal decomposition $TM = TF \oplus TH$. Thus every vector field X is decomposable as: $X = X^v + X^h$, where $X^v \in TF$, $X^h \in TH$. If $X^h = 0$ (respectively $X^v = 0$), then the field X is called as vertical (respectively horizontal) vector field.

The submersion $\pi : M \to B$ is said to be Riemannian if differential $d\pi$ preserves lengths of horizontal vectors. It is known that Riemannian submersions generate Riemannian foliation [5].

We remark that foliation F is called Riemannian if every geodesic, orthogonal at some point to leaves, remains orthogonal to leaves at all points.

The curve is called as horizontal if it's tangential vector is horizontal.

Let $\gamma : [a, b] \to B$ is smooth curve in B, and $\gamma(a) = p$. Horizontal curve $\tilde{\gamma} : [a, b] \to M$, $\tilde{\gamma}(a) \in \pi^{-1}(p)$ is called as horizontal lift of a curve $\gamma : [a, b] \to B$, if $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ for all $t \in [a, b]$.

The map $S : V(F) \times H(F) \to V(F)$, defined by the formula $S(X, U) = \nabla^v_X U$, is called second basic tensor, where $\nabla^v_X U$ is vertical component of vector field $\nabla_X U$, $V(F)$, $H(F)$ set of vertical and horizontal vector fields respectively.

At the fixed field of normal $U \in HF$, map $S(X, U)$ generates tensor field S_U of type (1,1):

$$S(X, U) = S_U X = \nabla^v_X U.$$

The tensor field S_U defines the bilinear form l_U :

$$l_U(X, Y) = \langle S_U X, Y \rangle.$$

The form $l_U(X, Y)$ is called second basic form with respect to a normal vector field U.

The tensor field S_U is linear map and consequently it is defined by the matrix $S(X, U) = AX$.

Horizontal vector field U is called basic if vector field $[Y, U]$ is also vertical for each vector field $Y \in V(F)$. Eigenvalues of matrix A is called the principal curvature of foliation F, when vector field U is basic. If the principal curvatures are locally constant along leaf, then foliation F is called isoparametric.

Let's consider some set $D \subset V(M)$, which contains finite or infinite number of smooth vector fields. For a point $x \in M$ through $t \to X^t(x)$ we will denote the integral curve of a vector field X passing through a point x at $t = 0$. Map $t \to X^t(x)$ is defined in some domain $I(x) \subset R$, which generally depends on field X and point x.

Recall that the vector field X on M is called the Killing vector field, if the group of local transformations $x \to X^t(x)$ consists of isometries [2]. Geometry of Killing vector fields is subject of numerous studies in connection its importance in geometry and other areas of mathematics [1], [2].

We will denote through $A(D)$ the smallest Lie subalgebra of algebra $K(M)$, containing the set D. Since the algebra $K(M)$ finite dimensional, there exist vector fields $X_1,\ X_2, ..., X_m$, that vectors $X_1(x),\ X_2(x),\ ..., X_m(x)$ forms basis for the subspace $A_x(D)$ for each $x \in M$, where

$$A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}.$$

Results of [2] allows constructing various submersions $\pi : R^m \to L(x_0)$ using the vector fields $X_1, X_2, ..., X_m$, by the formula

$$\pi(t_1, t_2, \ldots, t_m) = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(x_0)\ldots))).$$

Let's consider the Killing vector fields

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},\quad Y_3 = -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}$$

on R^4. It is easy to check that the basis of subalgebra $A(D)$ consists of following vector fields

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3},\quad X_3 = -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\quad X_4 = \frac{\partial}{\partial x_2},\quad X_5 = \frac{\partial}{\partial x_4}$$

and consequently the orbit $L(p)$ for each point $p \in R^4$ coincides with space R^4.

We will define following submersion $\pi : R^5 \to R^4$ with formula

$$\pi(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5) = X_5^{t_5}(X_4^{t_4}(X_3^{t_3}(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O))))),$$

where $O-$origin of coordinates in R^4.

Theorem 2. *There exists a Riemannian metric $\tilde{g}$ on R^4 that:*
1) Map $\pi : R^5 \to R^4$ is Riemannian submersion;
2) Submersion $\pi : R^5 \to R^4$ generates on R^5 is isoparametric foliation;
3) $(R^4,\ \tilde{g})$ is manifold of nonnegative curvature.

Rerefences

[1] Zoyidov A.N., Tursunov B.A. Geometry of submersions on manifolds of nonnegative curvature. Uzbek mathematical journal. 2015, № 2, pp.27-34.

[2] Narmanov A.Ya., Saitova S.S. On the Geometry of Orbits of Killing Vector Fields. Differential Equations, 2014, Vol. 50, No. 12, pp. 1–8. Original Russian Text published in Differentsial'nye Uravneniya, 2014, Vol. 50, No. 12, pp. 1582-1589.

[3] O'Neil B. The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p. 459-469

[4] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

[5] Reinhart B. L. Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 69, No. 1,1959, pp. 119-132

[6] Sussmann. H. Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, p. 197-199.

Contractibility of manifolds by means of stochastic flows

Alexandra Antoniouk, Sergiy Maksymenko
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine)
E-mail: antoniouk.a@gmail.com, maks@imath.kiev.ua

In [2] Xue-Mei Li studied stability of stochastic differential equations and the interplay between the moment stability of a SDE and the topology of the underlying manifold. In particular, she gave sufficient condition on SDE on a manifold M under which the fundamental group $\pi_1 M = 0$. We prove that in fact under essentially weaker conditions the manifold M is contractible, that is all homotopy groups $\pi_k M$, $k \geq 1$, vanish.

Let M be a smooth connected manifold (i.e. locally Euclidean Hausdorff topological space with countable base) of dimension m possibly non-compact and having a boundary and $\mathcal{T} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a probability space, so Ω is a set, $\mathcal{F}$ is a σ-algebra of subsets of Ω, and $\mathbf{P}$ is a probability measure on $\mathcal{F}$. Let also $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ for some $a \geq 0$ be a family of σ-algebras in $\mathcal{F}$ with the following properties:

- each $\mathcal{F}_t$ contains all null sets of $\mathcal{F}$;
- $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ for $s < t$;
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ is right continuous in the sense that $\mathcal{F}_s = \cap_{s<t}\mathcal{F}_t$ for all $s \geq 0$.

A map $\xi : M \times [0, +\infty) \times \Omega \to M$ will be called a *stochastic deformation* whenever there exists $N \in \mathcal{F}$ of measure 0 such that for each $\omega \in \Omega \setminus N$:

(a) the map $\xi_{x,t} : \Omega \to M$, $\xi_{x,t}(\omega) = \xi(x, t, \omega)$, is $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(M)$-measurable;
(b) the map $\xi_\omega : M \times [0, +\infty) \to M$, $\xi_t(x, t) = \xi(x, t, \omega)$, is continuous;
(c) $\xi(x, 0, \omega) = x$ for all $x \in M$.

If in addition to (a) and (b) the map ξ satisfies "semi-group property":

(d) $\xi_\omega(\xi_\omega(x, s), t) = \xi_\omega(x, s + t)$ for all $s, t \geq 0$,

then ξ is called an *autonomous stochastic flow.*

Given a stochastic deformation ξ one can define the following σ-additive probability measures $\mu_{x,t}$, $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$ on M by

$$\mu_{x,t}(A) := \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \xi(x, t, \omega) \in A\}.$$

Theorem 1. *Suppose ρ is a complete Riemannian metric on M and $\xi : M \times [0, +\infty) \times \Omega \to M$ is a stochastic deformation having the following properties:*

(i) *the map $\xi_{t,\omega} : M \to M$, $\xi_{t,\omega}(x) = \xi(x, t, \omega)$, is C^1 for all $t \in [0, +\infty)$ and $\omega \in \Omega \setminus N$;*
(ii) *for each compact subset $\mathbf{L}$ of the tangent bundle TM we have that*

$$\int_0^{+\infty} \sup_{(x,v)\in \mathbf{L}:\ x\in M,\ v\in T_xM} \mathbf{E}\,\|T_x\xi_{t,\omega}(v)\|dt < \infty,$$

where $\mathbf{E}f = \int_\Omega f d\mathbf{P}$ is a mean value, and the norm is taken with respect to ρ;
(iii) *there exists a point $z \in M$, a compact subset $K \subset M$, $\varepsilon > 0$ and $N > 0$ such that $\mu_{z,t}(K) > \varepsilon$ for all $t > N$.*

Then M is contractible.

Rerefences

[1] Alexandra Antoniouk, Sergiy Maksymenko, *Contractibility of manifolds by means of stochastic flows*, arXiv:1111.0070v3, 2017

[2] X.-M. Li, *Stochastic differential equations on noncompact manifolds: moment stability and its topological consequences*, Probab. Theory Related Fields 100(4) (1994) 417–428.

More about set-theoretical entropies in generalized shifts

Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi
(Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran)
E-mail: fatemah@khayam.ut.ac.ir

For arbitrary map $f : A \to A$ and finite subset F of A [2]:

$$\mathrm{ent}_{set}(f, F) := \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp(F \cup f(F) \cup \cdots \cup f^{n-1}(F))}{n}$$

exists and we call $\mathrm{ent}_{set}(f) := \sup\{\mathrm{ent}_{set}(f, F) : D \text{ is a finite subset of } A\}$, the set-theoretical entropy of $f : A \to A$.

Moreover, if $f : A \to A$ is surjective and finite fiber (i.e., $f^{-1}(x)$ is finite for all $x \in A$), then for finite subset F of A [5]:

$$\mathrm{ent}_{cset}(f, F) := \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp(F \cup f^{-1}(F) \cup \cdots \cup f^{-(n-1)}(F))}{n}$$

exists and we call $\mathrm{ent}_{cset}(f) := \sup\{\mathrm{ent}_{cset}(f, F) : D \text{ is a finite subset of } A\}$, the contravariant set-theoretical entropy of $f : A \to A$.

Let's recall two well-known maps, one-sided shift $\underset{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mapsto(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}}{\{1,\dots,k\}^{\mathbb{N}} \to \{1,\dots,k\}^{\mathbb{N}}}$ and two-sided shift $\underset{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\mapsto(x_{n+1})_{n\in}}{\{1,\dots,k\}^{\mathbb{Z}} \to \{1,\dots}$
So for nonempty set Γ, arbitrary set X with at least two elements and self-map $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ one may consider generalized shift $\sigma_\varphi : \underset{(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}\mapsto(x_{\varphi(\alpha)})_{\alpha\in\Gamma}}{X^\Gamma \to X^\Gamma}$. It's evident that if X has topological (resp. group, linear vector space) structure, then X^Γ has topological (resp. group, linear vector space) structure too.

Suppose X is a finite discrete space with at least two elements, Γ is an infinite set and $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ is an arbitrary map also equip X^Γ with product (pointwise convergence) topology, then $\sigma_\varphi : X^\Gamma \to X^\Gamma$ is topological chaotic (positive topological entropy) if and only if $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ has positive set-theoretical entropy [2].

Moreover if X is a non-trivial finite abelian group and $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ is finite fiber, then algebraic entropy of $\sigma_\varphi \restriction_{\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} X} : \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} X \to \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} X$ interacts with contravariant set-theoretical entropy of $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ [1, 3].

In this talk we take a short tour on some obtained results on generalized shifts including: Devaney chaotic, Li-Yorke chaotic, e-chaotic, P-chaotic,.... generalized shifts including the list of published papers on the subject. Our final attention will be on generalized shifts set-theoretical entropies [4], with more details and results.

Rerefences

[1] M. Akhavin, F. Ayatollah Zadeh Shirazi, D. Dikranjan, A. Giordano Bruno, A. Hosseini, *Algebraic entropy of shift endomorphisms on abelian groups*, Quaestiones Mathematicae, 32: 529–550, 2009.

[2] F. Ayatollah Zadeh Shirazi, D. Dikranjan, *Set theoretical entropy: A tool to compute topological entropy*, Proceedings ICTA 2011, Islamabad, Pakistan, July 4-10, 2011 (Cambridge Scientific Publishers): 11–32, 2012.

[3] F. Ayatollah Zadeh Shirazi, S. Karimzadeh Dolatabad, S. Shamloo, *Interaction between cellularity of Alexandroff spaces and entropy of generalized shift maps*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 27(3): 397–410, 2016.

[4] F. Ayatollah Zadeh Shirazi, Z. Nili Ahmadabadi, *Set-theoretical entropies of generalized shifts*, submitted.

[5] D. Dikranjan, A. Giordano Bruno, *Topological entropy and algebraic entropy for group endomorphisms*, Proceedings ICTA 2011, Islamabad, Pakistan, July 4-10, 2011, Cambridge Scientific Publishers: 133–214, 2012.

A comparative study on dynamical properties of Fort, Fortissimo and Arens-Fort transformation groups

Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi
(Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran)
E-mail: fatemah@khayam.ut.ac.ir

Zahra Nili Ahmadabadi
(Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran, Iran)
E-mail: zahra.nili.a@gmail.com

By a transformation group (X, G, π) or simply (X, G) we mean a topological space X and discrete topological group G with identity e such that $\pi : \underset{(x,g)\mapsto xg}{X \times G}$ is continuous and $xe = x$, $x(st) = (xs)t$ for all $x \in X, s, t \in G)$ [2].
Now suppose Z is a topological space with $b \in Z$, and topology $\{U \subseteq Z : b \notin U \vee (Z \setminus U \text{ is finite})\}$ (resp. with topology $\{U \subseteq Z : b \notin U \vee (Z \setminus U \text{ is countable})\}$), then we say Z is a Fort space (rep. Fortissmio space) with particular point b ([1, Counterexamples 24 and 25]). Suppose $Y = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ (where $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$), consider topology τ on Y consisting of subsets U of Y such that:

- $(0, 0) \notin U$,
- there exists $N \geq 1$ such that for all $k \geq N$, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : (k, n) \notin U\}$ is finite,

we call (Y, τ) Arens–Fort topological space [1, Counterexample 26].
Dynamical properties of Fort transformation groups has been studied in several texts, like [3]. In this text we make a comprative study on dynamical properties of Fort, Fortissmio and Arens-Fort transformation groups.

Rerefences

[1] Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi, Mohammad Ali Mahmoodi, Morvarid Raeisi. On distality of a transformation semigroup with one point compactification of a discrete space as phase space, *Iranian Journal of Science and Technology, Tansaction A: Science*, Volume 40, Issue 4: 209–217, 2016.

[2] Robert Ellis. *Lectures on topological dynamics*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[3] Lynn A. Steen, J. Arthur Seebach. *Counterexamples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York–Montreal, 1970.

Construction and topological properties of the closed extension topology

Vyacheslav Babych
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)
E-mail: vyacheslav.babych@gmail.com

Let (X, τ) be a topological space and let X^* be a superset of X. Then the family

$$\tau^* = \{V \subset X^* \mid V \subset X^* \backslash X \text{ or } V = (X^* \backslash X) \cup U,\ U \in \tau\}$$

is a topology for X^*, which is called *the closed extension topology of X to X^**. Indeed, if all of the sets $U_\alpha \in \tau^*$, $\alpha \in T$, lies in $X^* \backslash X$, then their union is also contained in $X^* \backslash X$. Otherwise, this union has the form $(X^* \backslash X) \cup U$ for some $U \in \tau$. If the index set T is finite and at least one of U_α lies in $X^* \backslash X$, then the intersection $\bigcap_{\alpha \in T} U_\alpha$ is also contained in $X^* \backslash X$. Otherwise, this intersection has the form $(X^* \backslash X) \cup U$ for some $U \in \tau$.

Thus the open sets of X^* are all subsets of $X^* \backslash X$ and all unions $(X^* \backslash X) \cup U$ where U is open in X. Respectively, closed sets in X^* are all supersets of X and all closed sets in X.

Example 1. Let X be a topological space and let A be a proper subset of X. Then A-excluded topology for X is the closed extension topology of the indiscrete space A to X.

Proposition 2. *The closed extension topology τ^* of a topological space (X, τ) to X^* is supremum of topology $\sigma = \{\varnothing\} \cup \{(X^* \backslash X) \cup V,\ V \in \tau\}$ and X-excluded topology for X^*.*

A map $f : X \to Y$ of topological spaces (X, τ) and (Y, σ) is called *inducing*, if the topology τ is induced by σ and f.

Theorem 3. *Let (X, τ) be a topological space, let X^* be a superset of the set X and let τ^* be the closed extension topology of X to X^*. Then the natural embedding $X \ni x \overset{i}{\mapsto} x \in X^*$ is closed inducing map. In particular, (X, τ) is closed subspace of (X^*, τ^*).*

Unlike extension topology [2] closed extension topology (like open extension topology [3]) is not transitive. Hence the natural embedding $X \ni x \overset{i}{\mapsto} x \in X^*$ is not quotient, i. e. the closed extension topology is not quotient topology with respect to τ and i.

Example 4. Consider nested sets $X = \{a\}$, $X^* = \{a, b\}$, $X^{**} = \{a, b, c\}$. Then for the discrete topology τ for X we have $(\tau^*)^* = \{\varnothing, X^{**}, \{c\}, \{b, c\}\} \neq \tau^{**} = \{\varnothing, X^{**}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$.

Let us describe a base of the least cardinality of the closed extension topology and local one with respect to it.

Proposition 5. *A base of the least cardinality of the closed extension topology of a space X to X^* has the form $\beta^* = \{\{x\}, (X^* \backslash X) \cup U \mid x \in X^* \backslash X, U \in \beta\}$ where β is a base of the least cardinality of the space X.*

Proposition 6. *Let τ^* be the closed extension topology of a space X to X^*. Then a local base of the least cardinality at any point $x \in X^*$ has the form $\{\{x\}\}$ for $x \in X^* \backslash X$, and $\{(X^* \backslash X) \cup U \mid U \in \beta_x\}$ where β_x is a local base of the least cardinality at point x in X, for $x \in X$.*

The following Proposition gives an explicit description of the interior, the closure, the sets of isolated and limit points of an arbitrary set of a topological space with the closed extension topology, and necessary and sufficient conditions for density and nowhere density of a given set.

Proposition 7. *Let τ^* be the closed extension topology of a space X to X^* and let $A \subset X^*$. Then:*

1) the interior of A in X^* is equal to $\operatorname{Int}_{X^*} A = (X^* \backslash X) \cup \operatorname{Int}_X(A \cap X)$, where $\operatorname{Int}_X(A \cap X)$ is the interior of the intersection $A \cap X$ in X, when $A \supset X^* \backslash X$, and $\operatorname{Int}_{X^*} A = A \backslash X$ otherwise;

2) the closure of A in X^* has the form $\overline{A}_{X^*} = \overline{A}_X$, where $\overline{A}_X$ is the closure of A in X, when $A \subset X$, and $\overline{A}_{X^*} = A \cup X$ otherwise;

3) the set of isolated points of A in X^* is calculated by formula $\mathrm{I}_{X^*}(A) = \mathrm{I}_X(A)$, where $\mathrm{I}_X(A)$ is the set of isolated points of A in X, when $A \subset X$, and $\mathrm{I}_{X^*}(A) = A \backslash X$ otherwise;

4) the set of limit points of A in X^* is equal to A'_X, where A'_X is the set of limit points of A in X, when $A \subset X$, and $A'_{X^*} = X$ otherwise;

5) if $X^* \backslash X \neq \varnothing$, then A is dense in X^* if and only if $A \supset X^* \backslash X$; otherwise A is dense in X^* if and only if A is dense in X.

6) A is nowhere dense in X^* if and only if $A \subset X$.

Now we proceed with the study of topological properties of the closed extension topology.

Theorem 8. *Let τ^* be the closed extension topology of a space X to X^* and $X^* \neq X$. Then X^* is path connected and thus connected.*

Corollary 9. *Every topological space can be embedded as closed subspace in a path connected (and thus connected) topological space.*

The next fact follows directly from propositions 5 and 6.

Theorem 10. *Let τ^* be the closed extension topology of a space X to X^*. The topological space X^* is first countable if and only if the space X is first countable. The space X^* is second countable if and only if the space X is second countable and the complement $X^* \backslash X$ is at most countable.*

Theorem 11. *Let τ^* be the closed extension topology of a space X to X^*. The topological space X^* is Lindelöf (compact) if and only if the space X is Lindelöf (compact).*

Theorem 12. *Let τ^* be the closed extension topology of a space X to X^* and $X^* \neq X$. The topological space X^* is separable if and only if the complement $X^* \backslash X$ is at most countable. The set $X^* \backslash X$ is at most countable dense set in X^* of the least cardinality.*

Theorem 13. *Let τ^* be the closed extension topology of a space X to X^* and $X^* \neq X$. The topological space X^* is T_0 if and only if the space X is T_0. The space X^* is T_4 if and only if every two nonempty closed sets in X intersect (a stronger condition than T_4 separation axiom). The space X^* is not T_i for $i = 1, 2, 3$. In particular, X^* is not regular, normal and metrizable.*

Rerefences

[1] *Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach, Jr.* Counterexamples in topology. – New York: Dover publications, 1978. – 256 p.

[2] *Babych V. M., Filonenko O. M.* Extension Topology // Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics. – 2015. – **1 (26)**. – p. 7-11. [in Ukrainian]

[3] *Babych V. M., Pyekhtyeryev V. O.* Open Extension Topology // Proc. Intern. Geom. Center. – 2015. – Vol. 8. – No. 2. – p. 20-25. [in Ukrainian]

[4] *Engelking R.* General Topology. Revised and completed edition. – Berlin: Heldermann Verlag, 1989. – 540 p.

Tuning role of surface slices within urbanism-index fuzzy system hypersurfaces

Vladimir Balan
(Univ. Politehnica of Bucharest, Fac. of Appl. Sci., Dept. Math.-Informatics, Romania)
E-mail: vladimir.balan@upb.ro

Corina Cipu, Manuela Măgureanu
(Univ. Politehnica of Bucharest, Fac. of Appl. Sci., Dept. of Appl. Math., Romania)
E-mail: corina.cipu@upb.ro, manuela_magureanu@yahoo.com

1. Introduction and preliminaries

For a long time, statistical and regression models were the most common analytical methods which, due to linearly dealing with the modelling phenomena, could not tract over-the-time changes with acceptable accuracy. However, recently, fuzzy and neural systems showed their ability to model nonlinear and complex phenomena, being successfully applied in various fields, including urbanism ([3, 1, 2]).

It is noteworthy that the geometry exhibited by the models based on fuzzy inference systems (FIS) proved to be an important tool for both model design and tuning, and for further prediction purposes. In such systems, the dependence of outputs on the input readings - regarded as parameters - naturally provide non-smooth Monge-type *hypersurfaces*.

In this work, by using FIS, we consider a model which uses least amount of metric information to predict the urbanism index of a city area. For such a system, we describe the factors which provide changes of the 2-parameter slices of the FIS hypersurface, viewed as Monge chart surfaces, and tools to measure the changes. We note that these slices are rich in information and might strongly differ, depending on various factors, e.g., used membership functions MF, Inference Rules, and defuzzification methods. As well, we analyze the relevance of the inferred variations of the the slice surfaces, and illustrate the theory by the metric-oriented urbanism index model, based on the recent statistics of the Bucharest city area.

We shall further consider a FIS of Mamdani type [5] (firstly introduced in [7]), which has the input linguistic variables $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ($n \geq 1$) and one output variable w, having the corresponding input domains $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ and respectively $D_* \subset \mathbb{R}$. For such FIS, both $\mathcal{V} \cup \{w\}$ with their MF, and the inference rules (IR), provide for each reading set $(t_1, \ldots, t_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$, after the defuzzification of the aggregate output set (AS), the value $f(t_1, \ldots, t_n) \in D_*$. The image $\Sigma = f(D_1 \times \ldots \times D_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ then represents an $n-$dimensional parametrized $\mathcal{C}^0-$*hypersurface of Monge type*, which exhibits a prominent non-smooth character. We further exemplify the role played by the geometry of Σ, by considering the surface slices $\Sigma_{ij} = \Sigma_{|t_k=c_k,\ k\in\overline{1,n}\setminus\{i,j\}}$, for $1 \leq i < j \leq n$.

2. FIS urbanism-index model. Slice surface geometry vs. tuning and prognosis

To exemplify the tuning and prognostic role of slice-surfaces, we design a simplified model which mainly uses metric-type input linguistic variables built on the statistical official data of the Bucharest city area, inspired by a similar model (Boston, [2]). In this model, we fix $n = 5$, and the five input variables (whose domains are determined by the 1993-2015 time range data):

(1) v_1: City area (in hectares)[1]; $D_1 = [15200, 24000]$;
(2) v_2: City green area (in hectares); $D_2 = [4100, 4900]$;
(3) v_3: City streets length (in kilometers)[2]; $D_3 = [1800, 3500]$;
(4) v_4: Modernized streets length (in kilometers); $D_4 = [800, 2600]$;
(5) v_5: City population (in units); $D_5 = [2100000, 2250000] \cap \mathbb{N}$;
(6) w: *Urbanism index coefficient* (UI) - output *linguistic variable* (LV); $D_* = [0, 1]$.

The associated membership functions (which cover the attributes *very low, low, medium, high, very high*) have the support determined by the time-scale measurements within the corresponding range, and are of type *trapezoid-triangles-trapezoid or Gaussian.* The inference rules are estimated based on existing models from literature (e.g., [2, 3, 1, 6]), the considered FIS is of Mamdani type, and the defuzzification is of type COG and MOM.

[1]Correspondence with non-SI units: 1 ha=2.471 acres.

[2]Correspondence with non-SI units: 1 km=0.621 miles=3281 feet.

By using Matlab programming and its Fuzzy Logic Toolbox facilities, one can observe and use the geometric relevance of the accurate numerically *sampled slice-surfaces* Σ_{ij}, for investigating the influence of a pair of the i, j LV on the UI, under constant readings of the remaining 3 ones. This proves to be useful in such FIS-tuning situations, when both the pair (i, j) and the complimentary readings for $k \in \overline{1,5} \setminus \{i, j\}$ are fixed, as follows:

- the change of the supports of the MFs of the two linguistic variables - when their impact on the UI is reconsidered, without changing the MF shape;
- the change of the shapes of the membership functions of the two linguistic variables - when their shape and smoothness changes;
- the change of the inference rules which affect the two LV - when their role in producing the UI is either modified as adjoint inputs/output, or changed as weight;
- the change of the defuzzification method - when changing the dependence of UI in terms of the maximal range of the aggregate MF subset, vs. considering the whole aggregate MF;
- the extension of input domains $\mathcal{D}$ - in *predictions* - when the two parameters predict a variation of the urbanism index (UI), whose variation can be experimentally estimated.

In each case, the newly obtained surface Σ'_{ij} allows the user to anticipate the change of the urbanism index. The change may be evaluated by considering the *distance* $d(\Sigma'_{ij}, \Sigma_{ij})$ *between the two surfaces*, which allows to indicate the type of tuning of the FIS, in order to finally produce a closer UI to its expected real estimate, and which ultimately empowers the FIS to become a valid tool for better customize the UI prognosis.

We illustrate the five situations in which the geometry of the area-population / UI slice surface changes due to the structural change of the two inputs, allowing a *proper* tuning of the FIS.

Our further research intends to develop and compare the FIS relative to other Romanian cities. The further goal aims to provide a tool FIS that would enable users to upload their input data, customize the rules and produce maps for a set of specific general objectives. We note that the integrated, multidisciplinary nature of this project maximizes opportunities to advance understanding of coupled natural and human systems in the urban context.

Acknowledgement. The present work was funded by University Politehnica of Bucharest, by *Excellence Research Grants* (*UPB - GEX, ID: UPB-Excelenţă-2016*), *Applied Mathematics in Urbanism*, # 25/26.09.2016.

Rerefences

[1] H. Alkan-Bala, T. Ustuntas. Modelling the urban interface by using fuzzy logic. *Journal of Building Construction and Planning Research.* 2 : 59-73, 2014.

[2] S. Gopal, X. Tang, N. Phillips, M. Nomack, V. Pasquarella, J. Pitts. Characterizing urban landscapes using fuzzy sets. *Computers, Environment and Urban Systems*, 57 : 212-223, 2016.

[3] F. Habib, A. Shokoohi. Classification and resolving urban problems by means of fuzzy approach. *International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering*, 3(12) : 501-508, 2009.

[4] S. G. Leiko, V. Balan. *Fuzzy Sets and Logic. Introduction to The Theory and Applications.* Bucharest : Printech Eds., 2006.

[5] E. H. Mamdani, S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1) : 1-13, 1975.

[6] T. C. Ogwueleka, F.N. Ogwueleka. Fuzzy logic modelling of municipal solid waste generation. *Journal of Science, Technology, Mathematics and Education (JOSTMED)*, 7(3) : 160-175, 2011.

[7] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 3(1) : 28-44, 1973.

On the Chogoshvili's spectral homology theory of the second family

Shalva Bakhtadze
(Batumi Shota Rustaveli State University, Batumi, Georgia)
E-mail: bakhtadze.shalva@yandex.com

Let LP_2 be a category of pairs of locally compacted paracompact spaces and their proper mappings, and $(X, A) \in LP_2$. Locally finite open covering $\alpha_r = \left\{ U_t^{(\alpha_r)} | t \in T^{(\alpha_r)} \right\}$ of a space X is called a regular covering, if the closures of its elements are compact in X. Let denote induced by a covering α_r a regular covering in the subspace A as $\widetilde{\alpha_r}$. Let denote as $Cov^r(X, A) = \{(\alpha_r, \widetilde{\alpha_r}) | \alpha_r \in Cov^r(X)\}$ the set of all regular coverings of the pair (X, A), and as $(N_{\alpha_r}, N_{\widetilde{\alpha_r}})$ a pair of nerves of the pair coverings $(\alpha_r, \widetilde{\alpha_r})$. Each inscription $(\alpha_r, \widetilde{\alpha_r}) \succ \left(\alpha'_r, \widetilde{\alpha'_r}\right)$ defines

$$\pi_{\alpha'_r}^{\alpha_r} : (N_{\alpha_r}, N_{\widetilde{\alpha_r}}) \to \left(N_{\alpha'_r}, N_{\widetilde{\alpha'_r}}\right) \qquad (1)$$

the pairwise adjacent simplicial mappings. Let $H_n^{\inf}(N_{\alpha_r}, N_{\widetilde{\alpha_r}}; G)$ and $H_f^n(N_{\alpha_r}, N_{\widetilde{\alpha_r}}; H)$ n-dimensional homology and cohomology groups of all arbitrary (possible) cycles and finite cocycles of pairs of complexes $(N_{\alpha_r}, N_{\widetilde{\alpha_r}})$ with coefficients from groups G and H respectively. Then these groups and the homomorphisms $\pi_{\alpha'_r *}^{\alpha_r}$ and $\pi_{\alpha'_r}^{\alpha_r *}$, induced by the mappings (1), are constitute the direct and inverse spectra respectively homological and cohomological groups and homomorphisms:

$$\left\{ H_n^{\inf}(N_{\alpha_r}, N_{\widetilde{\alpha_r}}; G), \pi_{\alpha'_r *}^{\alpha_r} | \alpha_r, \alpha'_r \in Cov^r(X) \right\}$$

and

$$\left\{ H_f^n(N_{\alpha_r}, N_{\widetilde{\alpha_r}}; H), \pi_{\alpha'_r}^{\alpha_r *} | \alpha_r, \alpha'_r \in Cov^r(X) \right\}.$$

Let denote their limiting groups as $H_n^{\inf}(X, A; G)$ and $H_f^n(X, A; H)$ and name them as n- dimensional spectral homological and cohomological Chogoshvili groups of second family of the pair $(X, A) \in LP_2$ over the groups of coefficients G and H, based on infinite chains and finite cochains, respectively.

It has been proved that $H_*^{\inf}$ is a semi-exact homology theory, while H_f^* satisfies all the Eilenberg-Steenrod axioms for cohomology theory. If $(X, A) \in LP_2$, the group G is compact and $G|H$, then the above constructed homology and cohomology groups are dual, i.e. $H_n^{\inf}(X, A; G) | H_f^n(X, A; H)$, $n \in Z$.

Rerefences

[1] Eilenberg S., Stiinrod N. Foundations for of algebraic topology. *Princeton University Press*, 1952.
[2] Chogoshvili G. Ob osnovnikh gomomorfizmakh dvoistvennosti. *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta AN GSSR*. - T.18, 1951.
[3] Mdzinarishvili L. Funktsionalnie gomologii. *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta AN GSSR*. - T.59, 1951.
[4] William Massey. Homology and Cohomology Theory. *Pure and applied mathematics.* vol. 46 , New York & Basel : Dekker, 1978.
[5] Baladze D. Issledovania po teorii homologii (estraordinarnie teorii). *Tbilisi*, 1984.

On almost contact metric hypersurfaces in special Hermitian manifolds

M. B. Banaru, G. A. Banaru
(Smolensk State University, Przhevalski str., 4, Smolensk, 214000, Russian Federation)
E-mail: mihail.banaru@yahoo.com

1. The well-known classification of the almost Hermitian structures on first order differential-geometrical invariants can be rightfully attributed to the most significant results obtained by the outstanding American mathematician Alfred Gray and his Spanish colleague Luis M. Hervella. According to this classification, all the almost Hermitian structures are divided into 16 classes. Analytical criteria for each concrete structure to belong to one or another class have been obtained [1].

The class of special Hermitian manifolds (or W_3-manifolds, using Gray-Hervella notation) has been studied not so detailed as other so-called "small" Gray-Hervella classes of almost Hermitian manifolds. Some dozens of significant works are devoted to the nearly Kählerian, almost Kählerian and locally conformal Kählerian manifolds, but much less of articles are written about special Hermitian manifolds.

We remark also that the present work is a continuation of researches of the authors in the area of Hermitian manifolds, mainly six-dimensional (see, for example, [2], [3], [4], [5], [6] and others).

2. As it is known, an almost Hermitian manifold is a $2n$-dimensional manifold M^{2n} with a Riemannian metric $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ and an almost complex structure J. Moreover, the following condition must hold

$$\langle JX,\ JY \rangle = \langle X,\ Y \rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

where $\aleph(M^{2n})$ is the module of smooth vector fields on M^{2n} [7].

We recall that the fundamental (or Kählerian) form of an almost Hermitian manifold is determined by the relation

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY \rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

where $X, Y, Z \in \aleph(M^{2n})$. A special Hermitian structure in addition must satisfy the condition $\delta\, F = 0$, where δ is the codifferentiation operator [7].

3. The main results are the following:

1) The Cartan structural equations of the general type almost contact metric structure on an oriented hypersurface in a special Hermitian manifold are obtained;

2) The Cartan structural equations of some important kinds of almost contact metric structures (cosymplectic, Sasaki, Kenmotsu etc.) on an oriented hypersurface in a special Hermitian manifold are selected;

3) A characterization in terms of the type number of some important kinds of almost contact metric structures (cosymplectic, Sasaki, Kenmotsu etc.) on hypersurfaces in special Hermitian manifolds is obtained;

4) A criterion of the minimality of such hypersurfaces in the terms of their type number is established.

These results are detailed for six-dimensional planar submanifolds [4], [5] of Cayley algebra that carry special Hermitian structures.

Rerefences

[1] A. Gray and L.M. Hervella. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 123(4), (1980), 35–58.

[2] M.B. Banaru. On Sasakian hypersurfaces in 6-dimensional Hermitian submanifolds of the Cayley algebra, *Sbornik: Mathematics*, 194(8), (2003), 1125–1137.

[3] M.B. Banaru. Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 207(3), (2015), 354–388.

[4] M.B. Banaru. The axiom of Sasakian hypersurfaces and six-dimensional Hermitian submanifolds of the octonion algebra, *Mathematical Notes*, 99(1), (2016), 155–159.

[5] M.B. Banaru and G.A. Banaru. A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra, *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova*. Matematica, 74(1), (2014), 23–32.

[6] M.B. Banaru and G.A. Banaru. 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian, *SUT Journal of Mathematics*, 51(1), (2015), 1–9.

[7] V.F. Kirichenko. Differential-geometrical structures on manifolds, Pechatnyi Dom, Odessa, (2003) (in Russian)

On a semitopological α-bicyclic semigroup

Serhii Bardyla
(Ivan Franko National University of Lviv)
E-mail: sbardyla@yahoo.com

We prove that α-bicyclic monoid $\mathcal{B}_\alpha$ is algebraically isomorphic to a semigroup of all order isomorphisms between the principal upper sets of the ordinal ω^α and prove that $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ is isomorphic to the Brook extension of the semigroup $\mathcal{B}_\alpha$. We prove that for every ordinal α for every $(a, b) \in \mathcal{B}_\alpha$ if either a or b is a non-limit ordinal then (a, b) is an isolated point in the semitopological $\mathcal{B}_\alpha$. We show that for every ordinal $\alpha < \omega + 1$ every locally compact semigroup topology on $\mathcal{B}_\alpha$ is discrete. However, we construct an example of a non-discrete locally compact topology τ_{lc} on $\mathcal{B}_{\omega+1}$ such that $(\mathcal{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ is a topological inverse semigroup. Also, for every positive integer n we describe all locally compact topologies on the semitopological $\mathcal{B}_n$. In particular we show that there exist exactly n distinct locally compact topologies on the semitopological n-bicyclic monoid $\mathcal{B}_n$.

Rerefences

[1] O. V. Gutik. On the dichotomy of the locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 80: 33–41, 2015.

[2] J. W. Hogan. Hausdorff topologies on the α-bicyclic semigroup. *Semigroup forum* 316: 189–209, 1987.

[3] A. A. Selden. A nonlocally compact nondiscrete topology for the α-bicyclic semigroup. *Semigroup forum* 31: 372–374, 1985.

Some applications of the discriminant and resonance sets of a real polynomial

Alexander Batkhin
(Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (Moscow), & Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny), Russia)
E-mail: batkhin@gmail.com

Let $f_n(x)$ be a monic polynomial of degree n with real coefficients $f_n(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$. The n-dimensional space $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ of its coefficients $\mathbf{P} = (a_1, \dots a_n)$ is called the *coefficient space* of $f_n(x)$. A pair of roots t_i, t_j, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, of $f_n(x)$ is called $p:q$*-commensurable* if $t_i : t_j = p : q$.

Definition 1. Resonance set $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$, $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $q \in \mathbb{N}$ of $f_n(x)$ is called the set of all points of the coefficient space Π at which $f_n(x)$ has at least a pair of $p:q$-commensurable roots, i.e.

$$\mathcal{R}_{p:q}(f_n) = \{\mathbf{P} \in \Pi : \exists i, j = 1, \dots, n, t_i : t_j = p : q\}. \tag{1}$$

The special case of $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ at the $p = q = 1$ is so called *discriminant set* $\mathcal{D}(f_n)$, playing an important role in solution of many problems.

The polynomial $f_n(x)$ has a pair of $p:q$-commensurable roots iff the pair of polynomials $f_n(px)$ and $f_n(qx)$ has at least one common root, or in terms of resultant $\mathrm{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = 0$. In the case when $p = q$ both polynomials $f_n(px)$ and $f_n(qx)$ have exactly n common roots. In case $a_n = 0$ one of the root is equal to zero, therefore resultant can be written in the form $\mathrm{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = a_n(p-q)^n \mathrm{GD}_{p:q}(f_n)$, where $\mathrm{GD}_{p:q}(f_n)$ is so called *generalized discriminant* of the polynomial $f_n(x)$ introduced in [1].

Definition 2. The *chain* $\mathrm{Ch}^{(k)}_{p:q}(t_i)$ *of* $p:q$*-commensurable roots* of length k (shortly *chain of roots*) is called the finite part of geometric progression with common ratio p/q and scale factor t_i, each member of which is a root of polynomial $f_n(x)$. The value t_i is called the *generating root*.

The detail structure of the resonance set (1) can be described with the help of so called *i-th generalized subdiscriminants* $\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n)$, which are nontrivial factors of i-th subresultants of pair of polynomials $f_n(px)$ and $f_n(qx)$. Such subresultants can be computed as i-th inners of Sylvester matrix constructed from the coefficients of mentioned above polynomials. For more details see [2].

Theorem 3. *Polynomial $f_n(x)$ has exactly $n-d$ different chains of roots $\mathrm{Ch}^{(i)}_{p:q}(t_j)$, $j = 1, \dots, n-d$ iff in the sequence $\left\{\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n), i = 0, \dots, n-1\right\}$ of i-th generalized subdiscriminants of $f_n(x)$ the first nonzero subdiscriminant is d-th generalized subdiscriminant $\mathrm{GD}^{(d)}_{p:q}(f_n)$.*

Consider a partition $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} \dots i^{n_i} \dots]$ of $n \in \mathbb{N}$. Partition functions $p(n)$ and $p_l(n)$ return the number of all partitions and the number of all partitions of the length l of $n \in \mathbb{N}$ respectively. The value i in the partition λ defines the length of chain $\mathrm{Ch}^{(i)}_{p:q}(t_i)$ for a corresponding generating root t_i, the value n_i defines the number of different generating roots, which give the chains of root of the length i. Any partition λ of number n defines a certain structure of $p:q$-commensurable roots of this polynomial and it corresponds to some algebraic variety $\mathcal{V}^i_l$, $i = 1, \dots, p_l(n)$ of dimension l in the coefficient space Π. The number of such varieties of dimension l is equal to $p_l(n)$ and total number of all varieties consisting the resonance set $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ is equal to $p(n) - 1$.

Parametrization of variety $\mathcal{V}_1$ can be expressed in q-binomial (Gaussian) coefficients:

$$a_i = (-1)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q p^{\frac{1}{2}i(i-1)} q^{\frac{1}{2}i(2n-i(i+1))} t_1^i, \quad i = 1, \dots, n, \text{ where } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=1}^{k} \frac{q^{n-i+1} - 1}{q^i - 1}.$$

Computation of parametric representation of any variety $\mathcal{V}_l$, $2 \leq l \leq n-1$, from the resonance set $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ is based on the following

Theorem 4 ([3])**.** *Let $\mathcal{V}_l$, $\dim \mathcal{V}_l = l < n-1$, be a variety on which polynomial $f_n(x)$ has l different chains of $p:q$-commensurable roots and the chain generated by the root t_1 has length $m > 1$. Let denote* *by* $\mathbf{r}_l(t_1, t_2, \ldots, t_l)$ *parametrization of variety* $\mathcal{V}_l$. *Therefore the following formula*

$$\mathbf{r}_{l+1}(t_1, \ldots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l) + \frac{p\left(t_{l+1} - p^{m-1}t_1\right)}{t_1\left(p^m - q^m\right)}\left[\mathbf{r}_l(t_1, \ldots, t_l) - \mathbf{r}_l((q/p)t_1, \ldots, t_l)\right] \qquad (2)$$

gives parametrization of the part of variety $\mathcal{V}_{l+1}$, *on which there exists* $\mathrm{Ch}_{p:q}^{(m-1)}(t_1)$, *simple root* t_{l+1} *and other chains of roots are the same as on the initial variety* $\mathcal{V}_l$.

From the geometrical point of view Theorem 4 means that a part of variety $\mathcal{V}_{l+1}$ is formed as a ruled $l+1$-dimensional surface by the secant lines, which cross its directrix $\mathcal{V}_l$ at two points defined by such values of parameters t_1^1 and t_1^2 that $t_1^1 : t_1^2 = q : p$. At $p/q \to 1$ mentioned above ruled surface becomes a tangent ruled surface which parametrization is $\mathbf{r}_{l+1} = \mathbf{r}_l + m^{-1}(t_{l+1} - t_1)\partial\mathbf{r}_l/\partial t_1$. If $f_n(x)$ has on the variety $\mathcal{V}_{l+1}$ a pair of complex-conjugate roots it is necessary to make continuation of obtained parametrization (2). Finally, it is possible to pass from variety with two chains of roots of length k to a variety with a chain of roots of length $2k$. Thus, combining the mentioned above procedure one can state the following

Theorem 5 ([3]). *Resonance set* $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ *of a real polynomial* $f_n(x)$ *for a certain value of commensurability coefficient* $p : q$ *allows polynomial parametrization of each variety* $\mathcal{V}_l \subset \mathcal{R}_{p:q}(f_n)$, $l = 1, \ldots, n-1$.

The software library for computation of the resonance set $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ was implemented for CAS `Maple`. The above results were effectively used in solving the following problems.

(1) The resonance set $\mathcal{R}_{p:q}(f_3)$ of a cubic was completely described and an outline of investigation of formal stability of a stationary point of a multiparameter Hamiltonian system with three degrees of freedom was proposed [4].
(2) The discriminant set of a real cubic polynomial was used in computation of global parametrization of one real variety Ω that plays an important role in the investigation of the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces related to invariant Einstein metrics [5].
(3) Parametric representation of the discriminant set $\mathcal{D}(f_4)$ of a quartic allows to find the set of stability of the linearized multiparameter Hamiltonian system with 4 degrees of freedom [6].

This talk is devoted to the description of the resonance $\mathcal{R}_{p:q}(f_4)$ and discriminant $\mathcal{D}(f_4)$ sets of a real quartic $f_4(x)$ and their application to the problem (3) in nonlinear case.

Rerefences

[1] Alexander Batkhin. Segregation of stability domains of the Hamilton nonlinear system. *Automation and Remote Control*, 74(8): 1269–1283, 2013. DOI: 10.1134/S0005117913080043

[2] Alexander Batkhin. Parameterization of the discriminant set of a polynomial. *Progr. & Comp. Soft.*, 42(2): 65–76, 2016. DOI: 10.1134/S0361768816020031

[3] Alexander Batkhin. Structure of the resonance set of a real polynomial. *Preprints of KIAM*, No 29, 2016. (in Russian) DOI: 10.20948/prepr-2016-29

[4] Alexander Batkhin. Resonance set of a polynomial and problem of formal stability. *Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*, No 4(35): 6-24, 2016. (in Russian) DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.4.1

[5] Alexander Batkhin. A real variety with boundary and its global parameterization. *Progr. & Comp. Soft.*, 43(2): 75–83, 2016. DOI: 10.1134/S0361768817020037

[6] Alexander Batkhin, Alexander Bruno and Victor Varin. Stability sets of multiparameter Hamiltonian systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 76(1): 56–92, 2012. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.03.006

Some cardinal and topological properties of N_τ^φ-kernel of a topological space X and superextensions

Beshimov R.B.
(National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: rbeshimov@mail.ru

Mukhamadiev F.G.
(Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: farkhod8717@mail.ru

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called *linked* if any two elements from ξ intersect. Any linked system can be complemented to a maximal linked system (MLS), but this complement is, as a rule, not unique [1].

Proposition 1. [1]. *A linked system ξ of a space X is a MLS iff it possesses the following completeness property: if a closed set $A \subset X$ intersects with any element form ξ, then $A \in \xi$.*

Denote by λX the set of all MLS of the space X. For an open set $U \subset X$, set

$$O(U) = \{\xi \in \lambda X : \text{ there is an } F \in \xi \text{ such that } F \subset U\}.$$

The family of subsets in the form of $O(U)$ covers the set λX $(O(X) = \lambda X)$, that's why it forms an open subbase of the topology on λX. The set λX equipped with this topology is called *the superextension* of X.

A.V. Ivanov defined the space NX of complete linked systems (CLS) of a space X in a following way:

Definition 2. A linked system M of closed subsets of a compact X is called *a complete linked system* (a CLS) if for any closed set of X, the condition

- any neighborhood OF of the set F consists of a set $\Phi \in M$

implies $F \in M$, [2].

A set NX of all complete linked systems of a compact X is called *the space NX of CLS of X*. This space is equipped with the topology, the open basis of which is formed by sets in the form of

$$\begin{aligned} E &= O(U_1, U_2, \dots, U_n)\langle V_1, V_2, \dots, V_s\rangle \\ &= \{M \in NX : \text{for any } i = 1, 2, \dots, n \text{ there exists } F_i \in M \text{ such that } F_i \subset U_i, \\ &\qquad \text{and for any } j = 1, 2, \dots, s,\ F \cap V_j \neq \varnothing \text{ for any } F \in M\}, \end{aligned}$$

where $U_1, U_2, \dots, U_n$, $V_1, V_2, \dots, V_s$ are nonempty open in X sets [2].

Definition 3. Let X be a compact space, φ be a cardinal function and τ be an arbitrary cardinal number. We call *an N_τ^φ - kernel* of a topological space X the space

$$N_\tau^\varphi X = \{M \in NX : \exists F \in M : \varphi(F) \leq \tau\}.$$

Theorem 4. *Let X be a normal topological space and $h\varphi(X) \leq \tau$. Then the following assertions are equivalent:*

1) $t(\lambda(\lambda X)) \leq \aleph_0$;
2) $t(\lambda(X \times X)) \leq \aleph_0$;
3) X is metrizable;
4) λX is metrizable;
5) $N_\tau^\varphi X$ is metrizable.

Rerefences

[1] Fedorchuk V. V., Filippov V. V. General Topology. Basic Constructions. *Fizmatlit, Moscow*, 2006.
[2] Ivanov A. V. *A space of complete linked systems*, volume 27 of *Siberian Mathematical Journal*. 1986. pp. 863-875.

Finiteness of pretangent spaces at infinity

Viktoriia Bilet
(IAMM of NASU, Dobrovolskogo Str. 1, Sloviansk, 84100, Ukraine)
E-mail: viktoriiabilet@gmail.com

Oleksiy Dovgoshey
(IAMM of NASU, Dobrovolskogo Str. 1, Sloviansk, 84100, Ukraine)
E-mail: oleksiy.dovgoshey@gmail.com

Let (X,d) be an unbounded metric space, p be a point of X and $\tilde{r}=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a scaling sequence of positive real numbers tending to infinity. Denote by $\tilde{\boldsymbol{X}}_{\infty,\tilde{r}}$ the set of all sequences $\tilde{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ for each of which $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,p)=\infty$ and there is a limit $\tilde{\tilde{d}}_{\tilde{r}}(\tilde{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d(x_n,p)}{r_n}$.

Define the equivalence relation $\equiv$ on $\tilde{\boldsymbol{X}}_{\infty,\tilde{r}}$ as

$$(\tilde{x}\equiv\tilde{y})\Leftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\frac{d(x_n,y_n)}{r_n}=0\right).$$

Let $\boldsymbol{\Omega}^X_{\infty,\tilde{r}}$ be the set of equivalence classes generated by $\equiv$ on $\tilde{\boldsymbol{X}}_{\infty,\tilde{r}}$. We shall say that points $\alpha,\beta\in\boldsymbol{\Omega}^X_{\infty,\tilde{r}}$ are *mutually stable* if for $\tilde{x}\in\alpha$ and $\tilde{y}\in\beta$ there is a finite limit

$$\rho(\alpha,\beta):=\lim_{n\to\infty}\frac{d(x_n,y_n)}{r_n}. \tag{1}$$

Let us consider the weighted graph $(G_{X,\tilde{r}},\rho)$ with the set of vertices $V(G_{X,\tilde{r}})=\boldsymbol{\Omega}^X_{\infty,\tilde{r}}$, the edge set $E(G_{X,\tilde{r}})$ such that

$$(\{u,v\}\in E(G_{X,\tilde{r}}))\Leftrightarrow(u\,\text{and}\,v\,\text{are mutually stable and}\,u\neq v),$$

and the weight $\rho: E(G_{X,\tilde{r}})\to\mathbb{R}^+$ defined by formula (1).

Definition 1. The *pretangent spaces* (to (X,d) at infinity w.r.t. $\tilde{r}$) are the maximal cliques of $(G_{X,\tilde{r}},\rho)$ with metrics defined by (1).

Recall that a *clique* in a graph G is a set $A\subseteq V(G)$ such that every two distinct points of A are adjacent. A *maximal clique* in G is a clique C such that the inclusion

$$V(C)\subseteq V(A)$$

implies the equality $V(C)=V(A)$ for every clique A in G.

We study the conditions under which pretangent spaces are finite.

For natural $n\geq 2$ define the function $F_n: X^n\to\mathbb{R}$ by the rule

$$F_n(x_1,\dots,x_n):=\begin{cases}\dfrac{\min\limits_{1\leq k\leq n} d(x_k,p)\prod\limits_{1\leq k<l\leq n} d(x_k,x_l)}{\left(\max\limits_{1\leq k\leq n} d(x_k,p)\right)^{\frac{n(n-1)}{2}+1}} & \text{if } (x_1,\dots,x_n)\neq(p,\dots,p),\\ 0 & \text{if } (x_1,\dots,x_n)=(p,\dots,p).\end{cases}$$

Theorem 2. *Let (X,d) be an unbounded metric space, $p\in X$ and let $n\geq 2$. Then the inequality $\left|\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}\right|\leq n$ holds for every pretangent space $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}\subseteq\boldsymbol{\Omega}^X_{\infty,\tilde{r}}$ if and only if*

$$\lim_{x_1,\dots,x_n\to\infty} F_n(x_1,\dots,x_n)=0.$$

Note that for every unbounded metric space (X,d) there is a pretangent space $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}$ consisting at least two points.

Let $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ be an infinite and strictly increasing sequence. Denote by $\tilde{r}'$ the subsequence $(r_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ of the scaling sequence $\tilde{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and, for every $\tilde{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_{\infty,\tilde{r}}$, write $\tilde{x}' := (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. It is clear that $\tilde{\tilde{d}}_{\tilde{r}'}(\tilde{x}') = \tilde{\tilde{d}}_{\tilde{r}}(\tilde{x})$ for every $\tilde{x} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_{\infty,\tilde{r}}$. Moreover, if $\tilde{y} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_{\infty,\tilde{r}}$ and there is $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d(x_n,y_n)}{r_n}$, then

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d(x_{n_k}, y_{n_k})}{r_{n_k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n}.$$

Consequently, the map $\pi' : \boldsymbol{\Omega}^X_{\infty,\tilde{r}} \to \boldsymbol{\Omega}^X_{\infty,\tilde{r}'}$ with $\pi'(\alpha) = \{(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha\}$ is an embedding of $(G_{X,\tilde{r}}, \rho)$ in $(G_{X,\tilde{r}'}, \rho)$, i.e. if v and u are adjacent in $G_{X,\tilde{r}}$, then $\pi'(v)$ and $\pi'(u)$ are adjacent in $G_{X,\tilde{r}'}$ and $\rho(\{u, v\}) = \rho(\{\pi'(u), \pi'(v)\})$. Hence, $\pi'(C)$ is a clique in $G_{X,\tilde{r}'}$ if C is a clique in $G_{X,\tilde{r}}$.

Definition 3. A pretangent space $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}$ is *tangent* if $\pi'(\Omega^X_{\infty,\tilde{r}})$ is a maximal clique in $G_{X,\tilde{r}'}$ for every infinite, strictly increasing sequence $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$.

Theorem 2 gives us a condition under which all pretangent spaces $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}$ are finite. Let us consider now the problem of existence of finite tangent space.

Definition 4. Let $E \subseteq \mathbb{R}^+$. *The porosity* of E at infinity is the quantity

$$p(E, \infty) := \limsup_{h\to\infty} \frac{l(\infty, h, E)}{h}$$

where $l(\infty, h, E)$ is the length of the longest interval in the set $[0, h] \setminus E$. The set E is *strongly porous* at infinity if $p(E, \infty) = 1$.

The standard definition of the porosity at a point can be found in [3].

Let (X, d) be a metric space and let $p \in X$. Write $S_p(X) := \{d(x, p) : x \in X\}$.

Theorem 5. *Let (X, d) be an unbounded metric space, $p \in X$. The following statements are equivalent:*

(i) *The set $S_p(X)$ is strongly porous at infinity;*
(ii) *There is a single-point, tangent space $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}$;*
(iii) *There is a finite tangent space $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}$;*
(iv) *There is a compact tangent space $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}$;*
(v) *There is a bounded, separable tangent space $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}$.*

Some results similar to Theorem 2 and Theorem 5 can be found in [1] and [2] respectively.

Acknowledgement. This research was partially supported by grant 0115U000136 of the Ministry Education and Science of Ukraine and by grant of the State Fund for Fundamental Research (project F71/20570).

Rerefences

[1] F. Abdullayev, O. Dovgoshey, M. Küçükaslan. Compactness and boundedness of tangent spaces to metric spaces. *Beitr. Algebra Geom.*, 51(2) : 547–576, 2010.

[2] O. Dovgoshey, O. Martio. Tangent spaces to general metric spaces. *Rev. Roumaine Math. Pures. Appl.*, 56(2) : 137–155, 2011.

[3] B. S. Thomson. *Real Functions*, Lecture Notes in Mathematics, 1170, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

A new method in geometry from a germinal approach to power sums

Enzo Bonacci
(Liceo G.B. Grassi, Via P.S. Agostino 8, Latina, 04100, Italy)
E-mail: enzo.bonacci@liceograssilatina.org

An original criterion for approaching the Fermat equation was devised during a 2005 summer course-work at the Saint-Petersburg State University and stored among the unpublished files by the Italian Society of Authors and Editors for a long time [1]. It consisted of counting the possible pairs $(a; b)$ in the hypothetical equation $a^p + b^p = c^p$ at integer variables a, b, c, p, with $a \leq b$ and p prime, in order to find decreasing values with the growth of p. The subsequent concept of progressive restriction for the number of addends in a p-power sum is now proposed in the field of geometric analysis.

Rerefences

[1] Enzo Bonacci. A Note on Fermat Equation's Fascination. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 6(4) : 139–146, 2016.

Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane

Iryna Denega
(Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine)
E-mail: iradenega@yandex.ru

Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ be a sets of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be the complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be a one point compactification. Let B be a domain in $\mathbb{C}$, $a \in B$ be a point in B and $r(B, a)$ be a inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to the point $a \in B$. Inner radius is a generalization of conformal radius for multiply connected domains.

Consider an extremal problem which was formulated in 1994 in the paper of Dubinin in the journal "Success of mathematical sciences" in the list of unsolved problems (see, for example, [1]).

Problem 1. *Consider the product*

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

where $B_0, B_1, \ldots, B_n, (n \geqslant 2)$ are pairwise disjoint domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ and $0 < \gamma \leqslant n$. Show that it attains its maximum at a configuration of domains B_k and points a_k possessing rotational n-symmetry.

This problem has a solution only if $\gamma \leqslant n$ as soon as $\gamma = n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, the Problem 1 has no solution. Currently it is not solved in general only special results are known.

Let

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(D_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right), \tag{1}$$

where d_k and D_k, $k = \overline{0,n}$, are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential

$$G(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2.$$

Denote

$$Q_n(\gamma) = \frac{\left[2^n \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}. \tag{2}$$

Theorem 1. [1] *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$ be a fixed natural number and γ, $\gamma \geqslant 1$ be a real number. Then for any configuration of domains B_k and points a_k $(k = \overline{0,n})$ satisfying a condition of Problem 1 and also provided that $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, the following sharp estimate holds*

$$\frac{r^{\gamma}(B_0, a_0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leqslant Q_n(\gamma),$$

where $I_n^0(\gamma)$ and $Q_n(\gamma)$ are defined by the relations (1) and (2). If γ_n^0 be a root of the equation $Q_n(\gamma) = 1$ then for an arbitrary γ_n such that $1 \leqslant \gamma_n < \gamma_n^0$ the following inequality holds

$$\frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} < 1.$$

Note that using Theorem 1 we can solve the Problem 1 for $n \geqslant 6$, $\gamma = \gamma_n^0$, and indicate its solution for an arbitrary γ_n such that $1 < \gamma_n < \gamma_n^0$.

Rerefences

[1] I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*, Feb 2017, http://www.tandfonline.com/eprint/ACymqAMAceewIG54tcCJ/full.

Some extremal and structural properties of finite ultrametric spaces

O. Dovgoshey
(Function theory department, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU,
Dobrovolskogo str. 1, Slovyansk 84100, Ukraine)
E-mail: oleksiy.dovgoshey@gmail.com

E. Petrov
(Function theory department, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU,
Dobrovolskogo str. 1, Slovyansk 84100, Ukraine)
E-mail: eugeniy.petrov@gmail.com

H.-M. Teichert
(Institute of Mathematics, University of Lübeck, Ratzeburger Allee 160, 23562 Lübeck, Germany)
E-mail: teichert@math.uni-luebeck.de

We describe some extremal and structural properties of finite ultrametric spaces which have the strictly n-ary representing trees and the representing trees with injective internal labeling.

Recall some definitions. The *spectrum* of an ultrametric space (X, d) is the set

$$\mathrm{Sp}(X) = \{d(x, y) \colon x, y \in X\}.$$

For a graph $G = (V, E)$, the sets $V = V(G)$ and $E = E(G)$ are called *the set of vertices (or nodes)* and *the set of edges*, respectively. Let (X, d) be an ultrametric space with $|X| \geqslant 2$ and the spectrum $\mathrm{Sp}(X)$ and let $r \in \mathrm{Sp}(X)$ be nonzero. Define by $G_{r,X}$ a graph for which $V(G_{r,X}) = X$ and

$$(\{u, v\} \in E(G_{r,X})) \Leftrightarrow (d(u, v) = r).$$

Denote by G' the subgraph of the graph G obtained from G by deleting of isolated vertices. With every finite ultrametric space (X, d) we can associate a labeled rooted tree T_X, see [1]. By $\mathbf{B}_X$ we denote the set of all balls of the space X.

Theorem 1. *Let (X, d) be a finite nonempty ultrametric space. The following conditions are equivalent.*

(i) The diameters of different nonsingular balls are different.

(ii) The internal labeling of T_X is injective.

(iii) $G'_{r,X}$ is a complete multipartite graph for every $r \in \mathrm{Sp}(X) \setminus \{0\}$.

(iv) The equality $|\mathbf{B}_X| = |X| + |\mathrm{Sp}(X)| - 1$ holds.

Let (X, d) be an ultrametric space. Recall that balls $B_1, \ldots, B_k$ in (X, d) are equidistant if there is $r > 0$ such that $d(x_i, x_j) = r$ holds whenever $x_i \in B_i$ and $x_j \in B_j$ and $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

Theorem 2. *Let (X, d) be a finite nonempty ultrametric space and let $n \geqslant 2$ be integer. The following conditions are equivalent.*

(i) T_X is strictly n-ary.

(ii) For every nonzero $r \in \mathrm{Sp}(X)$ the graph $G'_{r,X}$ is the union of p complete n-partite graphs, where p is a number of all internal nodes of T_X labeled by r.

(iii) For every nonsingular ball $B \in \mathbf{B}_X$ there are the equidistant balls $B_1, ..., B_n \in \mathbf{B}_X$ such that $B = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j$ and $\operatorname{diam} B_j < \operatorname{diam} B$ for every $j \in \{1, \ldots, n\}$.

(iv) The equality $(n-1)|\mathbf{B}_Y| + 1 = n|Y|$ holds for every ball $Y \in \mathbf{B}_X$.

Let T be a rooted tree and let v be a node of T. Denote by $\delta^+(v)$ the out-degree of v, i.e., $\delta^+(v)$ is the number of children of v, and write

$$\Delta^+(T) = \max_{v \in V(T)} \delta^+(v),$$

i.e., $\Delta^+(T)$ is the maximum out-degree of $V(T)$. It is clear that $v \in V(T)$ is a leaf of T if and only if $\delta^+(v) = 0$. Moreover, T is strictly n-ary if and only if the equality

$$\delta^+(v) = n$$

holds for every internal node v of T. Let us denote by $I(T)$ the set of all internal nodes of T.

Lemma 3. *The inequality*

$$|V(T)| \leqslant \Delta^+(T)|I(T)| + 1$$

holds for every rooted tree T. If $|V(T)| \geqslant 2$, then this inequality becomes the equality if and only if T is strictly n-ary with $n = \Delta^+(T)$.

Corollary 4. *The inequality*

$$|\mathbf{B}_X| \geqslant \frac{\Delta^+(T_X)|X| - 1}{\Delta^+(T_X) - 1}$$

holds for every finite nonempty ultrametric space (X, d). This inequality becomes an equality if and only if T_X is a strictly n-ary rooted tree with $n = \Delta^+(T_X)$.

Proposition 5. *Let (X, d) be a finite ultrametric space with $|X| \geq 2$. Then the inequality*

$$2|\mathbf{B}_X| \geqslant |\operatorname{Sp}(X)| + \frac{2\Delta^+(T_X)|X| - \Delta^+(T_X) - |X|}{\Delta^+(T_X) - 1}$$

holds. This inequality becomes an equality if and only if T_X is a strictly n-ary rooted tree with $n = \Delta^+(T_X)$ and with the injective internal labeling.

Corollary 6. *Let (X, d) be a finite ultrametric space with $|X| \geqslant 2$ and let $n = \Delta^+(T_X)$. The following conditions are equivalent.*

(i) T_X is a strictly n-ary tree with injective internal labeling.

(ii) $G'_{r,X}$ is complete n-partite graph for every $r \in \operatorname{Sp}(X)$.

(iii) The equality

$$2|\mathbf{B}_X| = |\operatorname{Sp}(X)| + \frac{2\Delta^+(T_X)|X| - \Delta^+(T_X) - |X|}{\Delta^+(T_X) - 1}$$

holds.

Rerefences

[1] Evgenii A. Petrov, Aleksei A. Dovgoshey. On the Gomory–Hu Inequality. *Journal of Mathematical Sciences*, 198(4): 392–411, 2014.

[2] O. Dovgoshey, E. Petrov, H.-M. Teichert. Extremal properties of finite ultrametric spaces and invariants of their isometries. arXiv:1610.08282v1, 2016.

Twistors, harmonic spinors and symmetry operators

Ümit Ertem
(Ankara University, Department of Physics, Faculty of Sciences, Tandogan 06100 Ankara, Turkey)
E-mail: umitertemm@gmail.com

In an n-dimensional spin manifold M, there are two first-order differential operators that can be defined on spinor fields which are written in terms of the Levi-Civita connection ∇. The first one is the Dirac operator

$$\not{D} = e^a.\nabla_{X_a}$$

where $\{X_a\}$ is the frame basis, $\{e^a\}$ is the coframe basis dual to it and . denotes the Clifford product. The second one is the twistor or Penrose operator defined as

$$P_X = \nabla_X - \frac{1}{n}\widetilde{X}.\not{D}$$

with respect ot any vector field X and its metric dual $\widetilde{X}$.

The spinor fields which are in the kernels of the Dirac operator and twistor operator are called harmonic spinors and twistor spinors, respectively. They satisfy the following massless Dirac and twistor equations

$$\begin{aligned} \not{D}\psi &= 0 \\ \nabla_X\psi &= \frac{1}{n}\widetilde{X}.\not{D}\psi \end{aligned}$$

respectively, where ψ is a spinor field.

Symmetry operators are defined as the operators that take solutions of an equation and give another solution and they can be constructed for harmonic spinors and twistor spinors from conformal Killing-Yano (CKY) forms which are antisymmetric generalizations of conformal Killing vector fields to higher degree differential forms [1, 2]. A p-form ω is a CKY p-form if it satisfies the equation

$$\nabla_X\omega = \frac{1}{p+1}i_X d\omega - \frac{1}{n-p+1}\widetilde{X}\wedge\delta\omega$$

where i_X is the contraction operator with respect to the vector field X, d is the exterior derivative and δ is the co-derivative operators. The symmetry operators of harmonic spinors are written in terms of a CKY p-form as

$$\mathcal{L}_\omega = i_{X^a}\omega.\nabla_{X_a} + \frac{p}{2(p+1)}d\omega - \frac{n-p}{2(n-p+1)}\delta\omega$$

and the symmetry operators of twistor spinors are

$$L_\omega = -(-1)^p\frac{p}{n}\omega.\not{D} + \frac{p}{2(p+1)}d\omega + \frac{p}{2(n-p+1)}\delta\omega.$$

Transformation operators that transform twistor spinors to harmonic spinors are also constructed as

$$L_\alpha = \alpha.\not{D} + \frac{(-1)^p n}{n-2(p+1)}d\alpha - \frac{(-1)^p n}{n-2(p-1)}\delta\alpha$$

where in this case α is a potential p-form that satisfies a generalized equation which reduces to Laplace equation for $p = 0$.

These constructions are generalized to $Spin^c$ manifolds in which gauged harmonic spinors and gauged twistor spinors are defined in terms of the gauged covariant derivative $\widehat{\nabla}_X = \nabla_X + i_X A$ and the gauged Dirac operator $\widehat{\not{D}} = \not{D} + A$ where A is the gauge connection 1-form. Algebraic conditions to obtain solutions of the Seiberg-Witten equations from gauged harmonic spinors are determined [3, 4].

Rerefences

[1] Ümit Ertem. Extended superalgebras from twistor and Killing spinors. *Differential Geometry and its Applications*, 2017. DOI:10.1016/j.difgeo.2017.04.002

[2] Ümit Ertem. Twistor spinors and extended conformal superalgebras. e-print: arXiv:1605.03361, 2016.

[3] Ümit Ertem. Gauged twistor spinors and symmetry operators. *Journal of Mathematical Physics*, 58: 032302, 2017.

[4] Ümit Ertem. Harmonic spinors from twistors and potential forms. e-print: arXiv:1704.04741, 2017.

The geometry of Banach space and fixed point of non-expansive mapping

Ji Gao
(Department of Mathematics, Community College of Philadelphia, Philadelphia, PA 19130-3991, USA)
E-mail: jgao@ccp.edu

Let X be a Banach space, and $B(X)$ and $S(X)$ be the unit ball and unit sphere of X. In this talk, we study the further properties of some known geometric parameters that related to convexity of $B(X)$, and curves on $S(X)$. The relationships of values of these parameters with normal structure, uniformly non-square are obtained. Some existing results about fixed points of non-expansive mapping are improved.

Artin-Schreier coverings, Galois representations and density Sato-Tate distribution functions

Nikolaj Glazunov
(National Aviation University)
E-mail: glanm@yahoo.com

Let k be a field of characteristic $p > 0$ and let X be a nonsingular projective variety defined over k. In most cases $k = \mathbb{F}_q, q = p^s$ for some positive integer s.

An Artin-Schreier covering of X is a finite morphism $\pi : Y \to X$ from a normal variety Y onto X such that the field extension $k(Y)/k(X)$ is an Artin-Schreier extension. This extension is defined by the Artin-Schreier equation $y^p - y = f$ and $f \in k(X)$.

Example 1. The equation in affine form $y^p - y = cx + \frac{d}{x},\ c, d \in \mathbb{F}_p^*$ defines an Artin-Schreier covering of the projective line.

Example 2. The equation in affine form $y^p - y = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a_i \in \mathbb{F}_p$ defines an Artin-Schreier curve and the respective covering of the projective line.

Proposition 3. *See* [1, 5]. *Let X be reduced absolutely irreducible nonsingular projective algebraic curve of genus g defined over a finite field $\mathbb{F}_q$. Let $\overline{\mathbb{F}}_q$ be an algebraic closure of $\mathbb{F}_q$. We may regard X as an algebraic curve over $\overline{\mathbb{F}}_q$. In this case on can attach to X the Jacobean $J(X)$ of X. Formal completion of the variety defines the commutative formal group F of dimension g.*

Proposition 4. *Under the conditions of the Proposition 3 there is an algebraic construction of the continuation of the Artin-Schreier covering $\pi : Y \to X$ to the map $\pi^{`} : J(Y) \to J(X)$.*

Let l be a prime such that $l \neq p$. Let $T_l(A)$ be the Tate module of the abelian variety A. In the case of the Jacobean $J(X)$ the Tate module is a free module of the rank $2g$ over l-adic numbers.

Example 5. For any two abelian varieties A_1 and A_2 the canonical homomorphism

$$h_l : Hom(A_1, A_2) \to Hom_{\mathbb{Z}_l}(T_l(A_1), T_l(A_2))$$

is an l-adic representation.

As the formal completion of an abelian variety defines a commutative formal group law (formal group) [2] F, present here some our results about homomorphisms of the groups over local and finite fields.

Let $\mathcal{O}$ be the complete discrete valuation ring of characteristic 0 with maximal ideal $\mathcal{M} = \pi\mathcal{O}$ so the residue field $k = \mathcal{O}/\mathcal{M}$ has characteristic $p > 0$. Let dimensions of formal groups F and G over $\mathcal{O}$ equal respectively n and m. Let $M_{nm}(\mathcal{O})$ be the ring of $n \times m$ matrices over $\mathcal{O}$.

Proposition 6. *Lubin homomorphism $c : Hom_{\mathcal{O}}(F, G) \to M_{nm}(\mathcal{O})$ is the injection.*

Let $Iso_R(F, G)$ be the set of isogenies from F to G over a commutative ring R.

Lemma 7. *If heights of group laws F and G are different then the set $Iso_k(F, G)$ is empty.*

Let F^* be the reduction of F by $mod\ \mathcal{M}$.

Proposition 8. *The mapping $* : Iso_{\mathcal{O}}(F, G) \to Iso_k(F^*, G^*)$ is the injection if $[p]^*$ is the isogeny.*

Definition 9. Let

$$T_p(c, d) = \sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i (\frac{cx + \frac{d}{x}}{p})},$$

$$1 \le c, d \le p - 1; \qquad x, c, d \in \mathbf{F}_p^*$$

be a Kloosterman sum.

Proposition 10. *The Kloosterman sum $T_p(c,d)$ is defined by the Artin-Schreier covering*

$$y^p - y = cx + \frac{d}{x}, \qquad c, d \in \mathbb{F}_p^*.$$

By A. Weil estimate $T_p(c,d) = 2\sqrt{p}\cos\theta_p(c,d)$.

There are possible two distributions of angles $\theta_p(c,d)$ on semiinterval $[0,\pi)$:

a) *p is fixed and c and d varies over $\mathbf{F}_p^*$; what is the distribution of angles $\theta_p(c,d)$ as $p \to \infty$;*

b) *c and d are fixed and p varies over all primes not dividing c and d.*

For the case *a*) N. Katz [3] and A. Adolphson [4] for few others sums proved that θ are distributed on $[0,\pi)$ with the Sato-Tate density $\frac{2}{\pi}\sin^2 t$.

Conjecture 11. *In the case b) when p varies over all primes then angles $\theta_p(1,1)$ are distributed on the interval $[0,\pi)$ with the Sato-Tate density $\frac{2}{\pi}\sin^2 t$.*

Rerefences

[1] David Mumford. Abelian Varieties. *Tata Institute of Fundamental Research Publications*, 2012, vol. 13, 263 p.
[2] Michiel Hazewinkel. *Formal Groups and Applications*, Providence, Rhode Island, Academic Press, 2012.
[3] Nicholas Katz. *Gauss sums, Kloosterman sums, and monodromy groups.* Princeton university press, 1988, 246 p.
[4] Alan Adolphson. *On the distribution of angles of Kloosterman sums.* Journ. rein. angew. Math., 1989, vol. 395, P. 214–220.
[5] Nikolaj Glazunov. *Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics*, Chebyshevskii Sbornik, 2015, vol.16, no. 3, P. 124–146.

Some Separation Axioms in Supra Soft Topological Spaces

Cigdem Gunduz Aras
(Department of Mathematics, Kocaeli University, Kocaeli, 41380-Turkey)
E-mail: caras@kocaeli.edu.tr

Sadi Bayramov
(Department of Algebra and Geometry, Baku State Universiy, Baku Az1148, Azerbaican)
E-mail: baysadi@gmail.com

In 1999, Russian researcher Molodtsov proposed the new concept of a soft set which can be considered as a new mathematical approach for vagueness. Topological stuructures of soft set have been studied by some authors in recent years. M.Shabir and M.Naz presented soft topological spaces and studied some important properties of them. Later many researcher studied some of basic concepts and properties of soft topological spaces. S.A.El-Sheikh and A.M. Abd El-latif introduced the concept of supra soft topological spaces. Supra soft topological spaces are generalization of soft topological spaces.

In this paper, we define separability axioms in supra soft topological spaces by using the soft point given in [4] and investigate some of their characterizations.

Rerefences

[1] D. Molodtsov. Soft set theory- first results.*Computers and Mathematics with Applications*, 37: 19-31, 1999.
[2] M.Shabir, M. Naz. On soft topological spaces.*Computers and Mathematics with Applications*, 61: 1786-1799, 2011.
[3] S.A.El-Sheikh, A.M.Abd El-latif. Decomposition of some types of supra soft sets and soft continuity.*International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 9(1): 37-56, 2014.
[4] S. Bayramov, C. Gunduz(Aras). Soft locally compact and soft paracompact spaces.*Journal of Mathematics and System Science*, 3: 122-130, 2013.

The differential-geometric and algebraic aspects of the Lax-Sato theory

Oksana Ye. Hentosh
(Pidstryhach Inst. for Applied Problems of Mech. and Math., NASU, Lviv, Ukraine)
E-mail: ohen@ukr.net

Yarema A. Prykarpatsky
(Institute of Mathematics, NASU, Kyiv, Ukraine)
E-mail: yarpry@gmail.com

Anatolij K. Prykarpatski
(Dept. of Math. and Phys., Ivan Franko State Pedagogical Univ. of Drohobych, Lviv region, Ukraine)
E-mail: pryk.anat@cybergal.com

In the report we investigate the Lax-Sato compatible systems of vector field equations, the related Lie algebraic structures and integrability properties of a very interesting class of nonlinear dynamical systems called the heavenly equations, which were initiated by Plebański and later analyzed in a series of articles [1, 2, 3]. Based on the Adler-Kostant-Symes-algebraic and related $\mathcal{R}$-structure schemes [4], applied to the holomorphic loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{diff}(\mathbb{T}^n)$ of vector fields on torus $\mathbb{T}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, there are studied orbits of the corresponding coadjoint actions on $\tilde{\mathcal{G}}^*$, deeply related with the classical Lie-Poisson type structures on them. Constructing two commuting to each other flows on the coadjoint space $\tilde{\mathcal{G}}^*$, generated by a chosen seed element $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ and some Casimir invariants, we demonstrate successively that their compatibility condition coincides exactly with the corresponding heavenly equation under consideration.

As a by-product of the construction, devised in the paper [5], we state that all the heavenly equations allow such an origin and can be equivalently represented as a Lax type compatibility condition for specially built loop vector fields on the torus $\mathbb{T}^n$. We analyze the structure of the infinite hierarchy of conservations laws, related with the heavenly equations, and demonstrate their analytical structure connected with the Casimir invariants, generated by the Lie-Poisson structure on $\tilde{\mathcal{G}}^*$. Moreover, we extend the initial Lie-algebraic structure on the case when the basic Lie algebra $\mathcal{G} := diff(\mathbb{T}^n)$ is replaced by the adjacent holomorphic Lie algebra $\bar{\mathcal{G}} := diff_{hol}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n) \subset diff(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n)$ of vector fields on $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$. For all cases there are presented typical examples of the heavenly equations and demonstrated in details their integrability within the scheme devised in the paper. The latter also makes it possible to derive from the natural point of view the well known Lax-Sato representation for an infinite hierarchy of the heavenly type equations, related with the canonical Lie-Poisson structure on the adjoint space $\bar{\mathcal{G}}^*$. We discuss briefly the Lagrangian representation of these equations, following from their Hamiltonicity with respect to both deeply related commuting to each other evolution flows, the related bi-Hamiltonian structure as well as the Backlund transformations. It should be noted that there are only few examples of multi-dimensional integrable systems, whose mathematical structure was explained and in detail.

The heavenly type equations make up an important class of such integrable systems since some of them are obtained by a reduction of the Einstein equations with Euclidean (and neutral) signature for (anti-) self-dual gravity which includes the theory of gravitational instantons (see, for example, [6]). This and other cases of important applications of multi-dimensional integrable equations strongly motivated us to study a such class of equations and the related mathematical structures. As a very interesting aspect of our approach to describing integrability of the heavenly type dynamical systems is its Lagrange-d'Alambert type mechanical interpretation.

The main motivating idea which featured our report was based both on the article by P. Kulish [7], devoted to studying the super-conformal Korteweg-de-Vries equation as an integrable Hamiltonian flow on the adjoint space to the holomorphic loop Lie algebra of super-conformal vector fields on the circle $\mathbb{S}^1$, and the article by V. Mikhalev [8], devoted to studying Hamiltonian structures on the adjoint space to the holomorphic loop Lie algebra of smooth vector fields on the circle $\mathbb{S}^1$. In this connection the holomorphic loop Lie algebra of super-conformal vector fields on the circle $\mathbb{S}^{1|N}$, $N \in \mathbb{N}$, is used for constructing the integrable superanalogs of integrable heavenly type dynamical systems in the report.

Additionally we were strongly influenced both by the paper of M. Pavlov and L. Bogdanov [2] and by the paper of E. Ferapontov and J. Moss [9], in which they devised new effective differential-geometric and analytical methods for studying an integrable degenerate multi-dimensional dispersionless heavenly type equations, and whose mathematical meaning is still far from being properly appreciated.

Concerning the papers developing other Lie-algebraic approaches to constructing integrable heavenly type equations we mention papers by V. Ovsienko and C. Roger [10], B. Szablikowski and A. Sergyeyev [11] and by B. Kruglikov and O. Morozov [12].

Rerefences

[1] L.V. Bogdanov, V.S. Dryuma and S.V. Manakov. Dunajski generalization of the second heavenly equation: dressing method and the hierarchy. *J.Phys.A: Math. Theor.*, 40 : 14383–14393, 2007.

[2] L.V. Bogdanov and M.V. Pavlov. Linearly degenerate hierarchies of quasiclassical SDYM type. arXiv:1603.00238v2 [nlin.SI], 15 Mar 2016.

[3] K. Takasaki and T. Takebe. Integrable hierarchies and dispersionless limit. *Reviews in Mathematical Physics*, 7(05): 743–808, 1995.

[4] D.L. Blackmore, A.K. Prykarpatsky and V.H. Samoylenko. Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. NJ, USA: World Scientific Publisher, 2011.

[5] Ya.A. Prykarpatsky and A.K. Prykarpatski. The integrable heavenly type equations and their Lie-algebraic structure. arXiv:submit/1818566 [nlin.SI], 28 Feb 2017.

[6] W.K. Schief. Self-dual Einstein spaces via a permutability theorem for the Tzitzeica equation. *Physics Letters A*, 223(1-2): 55-62, 1996.

[7] P.P. Kulish. A superanalog of the Korteweg-de Vries equation for the superconformal algebra. *LOMI Proceedings*, USSR Academy of Sciences, 155 : 142–148, 1986.

[8] V.G. Mikhalev. On the Hamiltonian formalism for Korteweg-de Vries type hierarchies. *Functional Analysis and Its Applications*, 26(2): 140–142, 1992.

[9] E.V. Ferapontov and J. Moss. Linearly degenerate PDEs and quadratic line complexes. arXiv:1204.2777v1 [math.DG], 12 Apr 2012.

[10] V. Ovsienko and C. Roger. Looped cotangent Virasoro algebra and non-linear integrable systems in dimension $2 + 1$. *Commun. Math. Phys.*, 273 : 357–378, 2007.

[11] A. Sergyeyev and B. M. Szablikowski. Central extensions of cotangent universal hierarrchy: $(2 + 1)$-dimensional bi-Hamiltonian systems. *Physics Lett. A*, 372 : 7016–7023, 2008.

[12] B. Kruglikov and O. Morozov. Integrable dispersionless PDE in 4D, their symmetry pseudogroups and deformations, arXiv:1410.7104v2 [math-ph], 11 Feb 2015.

Polyadic topology on Z and linear differential equations in the ring $Z[[x]]$

Viacheslav Herasymov
(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)
E-mail: `Slavka.gs@yandex.ua`

Sergiy Gefter
(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)
E-mail: `gefter@karazin.ua`

Let $Z[[x]]$ be a ring of formal power series with integer coefficients. On Z we consider the polyadic topology (see [1], Ch.III, section 3.5 and [2]) and on $Z[[x]]$ we consider the topology of coefficientwise convergence (see [3], Ch.1, section 0.4).

Let $b \in Z$ and $f(x) \in Z[[x]]$. A question on solutions of the following implicit linear nonhomogeneous differential equation $by' + f(x) = y$ in the ring $Z[[x]]$ is studied. The next main results are obtained.

1. The equation $y' + 1 + x + x^2 + \ldots = y$ has no a solution as a power series with integer coefficients.
2. By the concept of the polyadic sum of integers (see [1], Ch.III, section 3.5), a necessary and sufficient condition for the existence of a solution of the differential equation $by'(x) + f(x) = y(x)$ as a power series with integer coefficients was found.
3. If the equation $by'(x) + f(x) = y(x)$ has a solution $y(x)$ from $Z[[x]]$ then
$$y(x) = f(x) + bf'(x) + b^2 f''(x) + \ldots,$$
and this series converges in the topology of coefficient-wise convergence.

Rerefences

[1] A.G. Postnikov. Introduction to Analytic Number Theory (Translations of Mathematical Monographs). *American Mathematical Society*, 1988, 320 p.
[2] V.G. Chirsky. Arithmetic properties of integer polyadic numbers. *Chebyshevskii Sbornik*, 2015, 307 p.
[3] H. Grauert, R. Remmert. Analytische Stellenalgebre. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1971.

Deformation of a Morse function on a surface with the boundary

B.I. Hladysh
(Kyiv, Ukraine)
E-mail: biv92@ukr.net

A.O. Prishlyak
(Kyiv, Ukraine)
E-mail: prishlyak@yahoo.com

Let M be a compact smooth connected oriented surface with the boundary ∂M, $f : M \to \mathbb{R}$ be a smooth function, which has one critical point on each critical level (simple function), $CP(f)$ $(NDCP(f))$ be the set of (non-degenerated) critical points of the function f. We consider the class $\Omega(M)$ of functions f such that the following conditions hold:

- if the critical point p_0 of f belongs to the boundary ∂M, then p_0 is non-degenerated critical point of f;
- if the critical point p_0 of f is internal ($p_0 \notin \partial M$), then it is non-degenerated critical point of f and $f|_{\partial M}$;
- each critical point p_0 of $f|_{\partial M}$ is also critical point of f.

In other words, $\Omega(M) = \{f : M \to \mathbb{R} | CP(f) = NDCP(f) = CP(f|_{\partial M}) = NDCP(f|_{\partial M})\}$.

If $p_0 \in CP(f|_{\partial M})$, then $p_0 \in NDCP(f|_{\partial M})$ and $p_0 \in NDCP(f)$.

Let $f \in \Omega(M)$. The components of level lines of function f is called by layer. These layers are homeomorphic to the line segment or to the circle for the regular levels. Then the surface M is divided to the union of the layers which leads to the foliation with the singularities. We call the layer by the layer of the first (the second) type if it corresponds to the component of level line which is homeomorphic to the line segment (circle). Let us consider the equivalence relation on M, such that points are equivalent if and only if they belong to one and the same layer. Finally, the consideration of the quotient topology in the space of these layers advances to some graph Γ_f with black (for the layers of the first type) and red (for the layers of the second type) edges.

Definition 1. A vertex of the graph Γ_f of the function f with the valency 3 (4), incident to three black edges, is called by the Y–*vertex* (X–*vertex*).

We fix the cyclic order of the edges in the Y and X–vertices of the graph Γ_f accordingly to the orientation of the surface M.

Definition 2. An *equipped Kronrod–Reeb graph* of the function f of the *class* $\Omega(M)$ is defined to be the graph Γ_f with the following elements:

- black and red edges;
- fixed cycle order in the edges, which are incident to Y and X–vertices;
- fixed orientation of the edges (upward).

Remind that two given smooth functions $f \in \Omega(M)$ and $g \in \Omega(N)$ are said to be *fiber equipped equivalent* if there exists a homeomorphism $\lambda : M \to N$, which maps the components of the level sets of f onto the components of the level sets of g and preserve the growing directions of functions.

Definition 3. Equipped Kronrod–Reeb graphs Γ_f and Γ_g of the functions $f, g \in \Omega(M)$ are said to be *equivalent* with the isomorphism $\varphi : \Gamma_f \to \Gamma_g$ $(\Gamma_f \sim_\varphi \Gamma_g)$ if φ satisfies the following conditions:

- preserve the coloration of the edges;
- either preserve the cyclic order in all Y and X–vertices or simultaneously changes the order in all Y and X–vertices;
- preserve the orientation of the edges.

Theorem 4. *Let M, N be smooth compact surfaces (with the boundaries), $f \in \Omega(M)$, $g \in \Omega(N)$. Then f and g are fiber equipped equivalent if and only if their equipped Kronrod–Reeb graphs Γ_f and Γ_g are equivalent.*

Definition 5. A *simple deformation of a function $f_1 \in \Omega(M)$ into the function $f_2 \in \Omega(M)$* is defined to be a continuous function $F_t(x) := F(x,t) : M \to \mathbb{R}$, such that: $F_0(x) = f_1(x), x \in M$ and $F_1(x) = f_2(x), x \in M$. If there exists the one–point subset $I = \{t_0\} \subset (0,1)$, such that $F_t \in \Omega(M)$, $t \in [0,1] \backslash \{t_0\}$ and $F_{t_0} \notin \Omega(M)$, then we say that the deformation F_t has the *simple catastrophe* in the point t_0.

In the case Γ_f is a planar graph its correct to consider the function φ, which puts into the correspondence to each vertex v_i the set of all incident to it edges e_i^v, (for the black edges) l_i^v (for the red ones) and two comparison relations: $v_1 \prec v_2$ ($e_1 \prec e_2$) if v_1 (e_1) is under the v_2 (e_2) and $e_1 \vdash e_2$ if e_1 is left of the edge e_2. Then the function φ, relations $\prec$, $\vdash$ and the designation, which the edge is the common to the vertices v_1 and v_2, clearly define the graph Γ_f.

Definition 6. *A simple deformation of Kronrod–Reeb graph* is defined to be one of the following operations or converse to it (let v_1, v_2 be adjacent vertices, $v_1 \prec v_2$):

(1) contraction of the vertex v_2 and the edge $l_1^{v_2}$, if $\varphi(v_1) = \{e_1^{v_1} \prec l_1^{v_1} = l_1^{v_2}\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1^{v_2}\}$;
(2) contraction of the edge $e_1^{v_2} = e_2^{v_1}$ and incident to it vertices v_1, v_2 if $\varphi(v_1) = \{e_1^{v_1} \prec e_2^{v_1} = e_1^{v_2} \vdash e_3^{v_1}\}$, $\varphi(v_2) = \{e_1^{v_2}\}$;
(3) contraction of the edge $l_1^{v_2} = l_2^{v_1}$ and incident to it vertices v_1, v_2 if $\varphi(v_2) = \{l_1^{v_2}\}$, $\varphi(v_1) = \{l_1^{v_1} \prec l_2^{v_1} = l_1^{v_2} \vdash l_3^{v_1}\}$;
(4) symmetry of the edge $e_3^{v_1}$ if $\varphi(v_1) = \{e_1^{v_1} \prec e_2^{v_1} = e_1^{v_2} \vdash e_3^{v_1}\}$, $\varphi(v_2) = \{e_1^{v_2} \prec e_2^{v_2} \vdash e_3^{v_2}\}$, ie the isomorphism δ, such that $\varphi(\delta(v_1)) = \{e_1^{\delta(v_1)} \prec e_2^{\delta(v_1)} \vdash e_3^{\delta(v_1)} = e_1^{\delta(v_2)}\}$, $\varphi(\delta(v_2)) = \{e_1^{\delta(v_2)} \prec e_2^{\delta(v_2)} \vdash e_3^{\delta(v_2)}\}$;
(5) symmetry of the edge $l_3^{v_1}$ if $\varphi(v_1) = \{l_1^{v_1} \prec l_2^{v_1} = l_1^{v_2} \vdash l_3^{v_1}\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1^{v_2} \prec l_2^{v_2} \vdash l_3^{v_2}\}$, ie the isomorphism δ, such that $\varphi(\delta(v_1)) = \{l_1^{\delta(v_1)} \prec l_2^{\delta(v_1)} \vdash l_3^{\delta(v_1)} = l_1^{\delta(v_2)}\}$, $\varphi(\delta(v_2)) = \{l_1^{\delta(v_2)} \prec l_2^{\delta(v_2)} \vdash l_3^{\delta(v_2)}\}$;
(6) when $\varphi(v_1) = \{e_1^{v_1} \prec e_2^{v_1} = e_1^{v_2} \vdash e_3^{v_1}\}$, $\varphi(v_2) = \{e_1^{v_2} \prec e_2^{v_2} \vdash e_3^{v_2}\}$, the raising the vertex v_1 on the edge $e_3^{v_2}$, ie the isomorphism η, such that $\eta(v_2) \prec \eta(v_1)$ and $\varphi(\eta(v_2)) = \{e_1^{\eta(v_2)} \prec e_2^{\eta(v_2)} \vdash e_3^{\eta(v_2)} = e_1^{\eta(v_1)}\}$, $\varphi(\eta(v_1)) = \{e_1^{\eta(v_1)} \prec e_2^{\eta(v_1)} \vdash e_3^{\eta(v_1)}\}$;
(7) when $\varphi(v_1) = \{e_1^{v_1} \prec l_1^{v_1} = l_1^{v_2}\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1^{v_2} \prec l_2^{v_2} \vdash l_3^{v_2}\}$, the isomorphism μ, such that $\mu(v_2) \prec \mu(v_1)$ and $\varphi(\mu(v_2)) = \{e_1^{\mu(v_2)} \prec l_1^{\mu(v_2)} \vdash e_2^{\mu(v_2)} = e_1^{\mu(v_1)}\}$, $\varphi(\mu(v_1)) = \{e_1^{\mu(v_1)} \prec l_1^{\mu(v_1)}\}$;
(8) when $\varphi(v_1) = \{l_1^{v_1} \prec l_2^{v_1} = l_1^{v_2} \vdash l_3^{v_1}\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1^{v_2} \prec e_1^{v_2}\}$, the isomorphism ν, such that $\nu(v_2) \prec \nu(v_1)$ and $\varphi(\nu(v_2)) = \{l_1^{\nu(v_2)} \prec e_1^{\nu(v_2)} = e_1^{\nu(v_1)}\}$, $\varphi(\nu(v_1)) = \{e_1^{\nu(v_1)} \prec l_1^{\nu(v_1)} \vdash e_2^{\nu(v_1)}\}$.

Theorem 7. *There exists the simple deformation of codimension 1 between the functions $f, g \in \Omega(M)$ if and only if exists the simple deformation between their Kronrod–Reeb graph Γ_f and Γ_g.*

Rerefences

[1] B.I.Hladysh, A.O.Prishlyak. Functions with nondegenerated critical points on the boundary of the surface. *Ukrainian Mathematical Journal*, 68(1) : 28–37, 2016.

[2] V.I.Arnold, S.M.Gusein–Zade, A.N.Varchenko. *Singularities of Differentiable Maps*, volume 2 of *Monodromy and Asymptotics of Integrals*. Boston & Basel & Berlin : Birkh⊠user, 1988.

The similarity invariants of integral B-splines

Muhsin Incesu
(Mus Alparslan University Mathematics Department, Mus- Turkey)
E-mail: m.incesu@alparslan.edu.tr

Osman Gursoy
(Maltepe University Mathematics Department, Maltepe- Istanbul - Turkey)
E-mail: osmangursoy@maltepe.edu.tr

Let a transformation group G be given. and the algebra of $G-$invariant polynomials for m vector variables $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ in 3-dimensional Euclidean space R^3 over the field R is denoted by $R\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^G$. Then equivalence conditions of given $m-$ vector variables in terms of the elements of the generator system of the field of $G-$invariant rational functions $R\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^G$. All of them in this Study in 3-dimensional Euclidean space R^3 the similarity transformations' group $S(3)$ and its main subgroup $LS(3)$ is considered as transformation group G.

Later integral B-spline curves and surfaces considered as very measurable examples are given.Because this curves and surfaces have a very important property which is invariance under affine transformations. So the similarity invariants of integral B- Splines are examined.

Rerefences

[1] Victor Maslov. On a new superposition principle for optimization problems. *Russian Mathematical Surveys*, 42(3) : 43–54, 1987.
[2] William S Massey. *Homology and Cohomology Theory*, volume 46 of *Pure and applied mathematics*. New York & Basel : Dekker, 1978.
[3] Dj.Khadjiev, Some Questions in the Theory of Vector Invariants, *Math. USSR- Sbornic*, 1(3), 383-396, 1967.
[4] Grosshans F., Obsevable Groups and Hilbert's Problem, *American Journal of Math.*,95, 229-253, 1973.
[5] H. Weyl, The Classical Groups, Their Invariants and Representations, 2nd ed., with suppl., Princeton, *Princeton University Press*, 1946.
[6] Dj. Khadjiev , *An Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry of Curves*, Fan, Tashkent, 1988. (in Russian)
[7] F. Klein, A comperative review of recent researches in geometry (translated by Dr. M.W. Haskell), *Bulletin of the New York Mathematical Society*, 2,215-249, 1893.
[8] G. Birkhoff, Hydrodynamics, second Ed. Princeton, New Jersey, *Princeton Univ. Pres*, 1960.
[9] J.B.J. Fourier, Theoric Analytique de la Chaleur, 1822 (English Transl. By A. Freeman, The Analytical Theory of Heat, *Cambridge University Press*,1878).
[10] P. W. Bridgman, Dimensional Analysis, 2 nd Ed. *Yale University Press*, New Heaven, 1931.
[11] L.I.Sedov, Similarity and Dimensional Method in Mechanics, English Tr. By V.Kisin, *Mir Publishers*, USSR, 1982.
[12] H.L. Langhaar , Dimensional Analysis and Theory of Models,*Wiley*, 1951.
[13] M.Incesu, The Complete System of Point Invariants in the Similarity Geometry, Phd. Thesis, *Karadeniz Technical University*, Trabzon, 2008.
[14] Marsh D., Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, *Springer-Verlag London Berlin Heidelberg*, London, 1999.
[15] Farin G.,Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide, 2nd edition, *Academic Press Inc.*, San Diago, 1990.
[16] Farouki R. and Rajan V.T., On the numerical condition of polynomials in Bernstein form. *Computer Aided Geometric Design*, 4(3),191-216, 1987.

Geometry and integrability of pentagram maps

Boris Khesin
(University of Toronto)
E-mail: `boris.khesin@gmail.com`

We define pentagram maps on polygons in any dimension, which extend R.Schwartz's definition of the 2D pentagram map. Many of those maps turn out to be discrete integrable dynamical systems, while the corresponding continuous limits of such maps coincide with equations of the KdV hierarchy, generalizing the Boussinesq equation in 2D. We discuss their geometry, Lax forms, and interrelations between recent pentagram generalizations. This is a joint work with Fedor Soloviev.

The extremal problem for the area of an image of a disc

Bogdan Klishchuk
(Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine)
E-mail: kban1988@gmail.com

Ruslan Salimov
(Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine)
E-mail: ruslan623@yandex.ru

Let Γ be a family of curves γ in the complex plane $\mathbb{C}$. A Borel function $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ is called *admissible* for Γ, abbr. $\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma$, if

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(z)\,|dz| \;\geqslant\; 1$$

for all $\gamma \in \Gamma$. The *p–modulus* of Γ is the quantity defined by

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) \;=\; \inf_{\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^p(z)\,dx\,dy\,, \quad p \geqslant 1.$$

Let E, F and G be arbitrary sets in $\mathbb{C}$. Denote by $\Delta(E, F, G)$ a family of all continuous curves $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ joining E and F in G, i.e. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ and $\gamma(t) \in G$ for $a < t < b$. Given a domain $D \subset \mathbb{C}$ and $z_0 \in D$, denote by $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant r_2\} < d_0$, where $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$.

Now let $Q : D \to [0, \infty]$ be a (Lebesgue) measurable function. A homeomorphism $f : D \to \mathbb{C}$ is called *a ring Q-homeomorphism with respect to p-modulus* at $z_0 \in D$, if

$$\mathcal{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \;\leqslant\; \int\limits_{\mathbb{A}} Q(z)\,\eta^p(|z - z_0|)\,dx\,dy$$

for every ring $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, and every measurable function $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ such that $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geqslant 1$.

Let $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : \, |z| \leqslant 1\}$ and $Q : \mathbb{B} \to [0, \infty]$ be a (Lebesgue) measurable function. For $p > 2$ denote by $\mathcal{H}$ a set of all ring Q-homepmorphisms $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ with respect to p-modulus at the origin satisfying

$$q(t) = \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{S_t} Q(z)\,|dz| \leqslant q_0\, t^{-\alpha},\ q_0 \in (0, \infty)\,,\ \alpha \in [0, \infty)\,,$$

for almost all $t \in (0, 1)$. Here $S_t = \{z \in \mathbb{C} : |z| = t\}$. Let $\mathbf{S}_r(f) = |fB_r|$ be an area functional over the class $\mathcal{H}$ where $B_r = \{z \in \mathbb{C} : \, |z| \leqslant r\}$. The following statement provides an extremal bound for the functional $\mathbf{S}_r(f)$.

Theorem 1. *For all $r \in [0, 1]$*

$$\min_{f \in \mathcal{H}} \mathbf{S}_r(f) = \pi \left(\frac{p-2}{\alpha + p - 2}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}}\, r^{\frac{2(\alpha+p-2)}{p-2}}\,.$$

On projective classes of rational functions

Konovenko Nadiia
(Department of Mathematics, ONAFT, Odessa, Ukraine)
E-mail: `konovenko@ukr.net`

Lychagin Valentin
(Department of Mathematics, University of Tromsö, Norway)
E-mail: `valentin.lychagin@uit.no`

We study equivalence classes of rational functions on Riemann's sphere $\overline{\mathbb{C}}$ with respect to Möbius transformations (cf. [1]). The Lie group $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ acts on $\overline{\mathbb{C}}$ and the corresponding representations of Lie algebra $\mathbf{sl}_2(\mathbb{C})$ is given by the vector fields

$$\mathbf{sl}_2(\mathbb{C}) = \langle \frac{\partial}{\partial z}, \quad z\frac{\partial}{\partial z}, \quad z^2\frac{\partial}{\partial z} \rangle.$$

Denote by J^k the manifold of k-jets of analytical functions on $\overline{\mathbb{C}}$, and let $(z, u, u_1, \ldots, u_k)$ be the natural (local) coordinates on J^k.

Then a rational function I on the manifold J^k we call a projective invariant of order $\leq k$, if $X^{(k)}(I) = 0$, for all vector fields $X \in \mathbf{sl}_2(\mathbb{C})$. Here we denoted by $X^{(k)}$ the k-th prolongations of the vector field X.

Theorem 1. *The field of rational differential invariants of order $\leq k$ is generated by invariants*

$$J_0 = u, \qquad J_3 = u_1^{-3}u_3 - \frac{3}{2}u_2^2u_1^{-4},$$

and invariant derivatives

$$J_4 = \nabla(J_3), \quad \ldots, \quad J_k = \nabla^{k-3}(J_3),$$

where $\nabla = u_1^{-1}\frac{d}{dz}$.

This field separates regular $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ orbit.

For given rational function $f = f(z)$ we denote $J_3(f)$ the value of the projective invariant J_3 on f.

The transcendent degree of the field of rational functions on the Riemann sphere equals one, and therefore between functions f and $J_3(f)$ there is an algebraic relation

$$R\big(f, J_3(f)\big) = 0. \tag{1}$$

The polynomial R_f, which satisfies (1) and having the smallest degree, we call generating polynomial for f.

Theorem 2. (1) *The projective class of a rational function $f(z)$ is defined by the generating polynomial $R_f(f, J_3(f))$.*

(2) *Two rational functions $f(z)$, $g(z)$ are projectively equivalent if and only if the function $g(z)$ is a solution of the following ordinary differential equation:*

$$R_f\left(u, u_1^{-3}u_3 - \frac{3}{2}u_2^2u_1^{-4}\right) = 0. \tag{2}$$

Remark that this differential equation is so-called automorphic equation in the sense that the Möbius group $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{C})$ acts in a transitive way on the solution space of differential equation (2).

In particular, all solutions of differential equation (2) are rational functions.

Example 3. (1) Solutions of the following differential equation

$$\big(D + 4au\big)^2\big(2u_1u_3 - 3u_2^2\big) + 12a^2u_1^4 = 0$$

are rational functions that are projectively equivalent to polynomials of the second degree $f(z) = az^2 + bz + c$ with given discriminant D and leading coefficient a.

Remark that $\frac{D}{a}$ is a projective invariant.

(2) Solutions of differential equation

$$(u^2 - 4)(2u_1 u_3 - 3u_2^2) + 12u_1^4 = 0$$

are rational functions which are projectively invariant to the Jukowski function $f(z) = z + z^{-1}$.

Rerefences

[1] N. Konovenko. Differential invariants and $\mathfrak{sl}_2$ - geometries. *Kiev: "Naukova Dumka" NAS of Ukraine*, 2013, 192 p.

Orientations of trees and signed Markov graphs

Sergiy Kozerenko
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)
E-mail: kozerenko@univ.kiev.ua

For every vertex map $\sigma : V(X) \to V(X)$ on a finite tree X one can construct its *Markov graph* $\Gamma(X, \sigma)$ which is a digraph that encodes σ-covering relation between edges in X. By definition, $\Gamma(X, \sigma)$ has a vertex set equals the edge set $E(X)$ of X and for every edge $uv \in E(X)$ its out-neighbourhood in $\Gamma(X, \sigma)$ equals the edge set $E([\sigma(u), \sigma(v)]_X)$ of a unique shortest $\sigma(u) - \sigma(v)$ path in X.

Let $\tau : E(X) \to V(X)$ be an orientation of a tree X. For each non-constant map $\sigma : V(X) \to V(X)$ the orientation τ defines a map $s_\tau : A(\Gamma(X, \sigma)) \to \{1, -1\}$ in such a way that $s_\tau(e_1, e_2) = 1$, if $pr_{\,e_2}(\sigma(\tau(e_1))) = \tau(e_2)$ and $s_\tau(e_1, e_2) = -1$, otherwise. The pair $\Gamma^\tau(X, \sigma) = (\Gamma(X, \sigma), s_\tau)$ is the *signed Markov graph* of σ. Denote by $M_{\Gamma^\tau(X,\sigma)}$ the adjacency matrix of $\Gamma^\tau(X, \sigma)$. If σ is a constant map, then by definition $M_{\Gamma^\tau(X,\sigma)}$ is a null matrix. It is well-known (see [1, 2]) that for any fixed orientation τ of X the correspondence $\sigma \to M_{\Gamma^\tau(X,\sigma)}$ establishes a homomorphism from the full transformation semigroup T_n to the matrix semigroup $Mat_{\,n-1}(\mathbb{Z})$. Note that this correspondence is "almost" injective in the sense that $M_{\Gamma^\tau(X,\sigma_1)} = M_{\Gamma^\tau(X,\sigma_2)}$ if and only if $\sigma_1 = \sigma_2$ or σ_1 and σ_2 are both constant maps.

Theorem 1. [3] *For any orientation τ and a map σ the trace of $M_{\Gamma^\tau(X,\sigma)}$ equals $|fix\,\sigma| - 1$, where $fix\,\sigma$ is the set of σ-fixed points.*

A map σ is called *τ-positive* provided $s_\tau \equiv 1$. Similarly, one can define *τ-negative* maps. By definition constant maps are τ-positive and τ-negative for all orientations τ.

Proposition 2. *A map σ is τ-positive for all τ if and only if σ is a projection on some connected set of vertices. Similarly, σ is τ-positive for all τ if and only if σ is constant.*

For a map σ an edge $uv \in E(X)$ is called *σ-positive* (*σ-negative*) if $pr_{\,uv}(\sigma(u)) = u$ and $pr_{\,uv}(\sigma(v)) = v$ ($pr_{\,uv}(\sigma(u)) = v$ and $pr_{\,uv}(\sigma(v)) = u$). Denote by $p(X, \sigma)$ and $n(X, \sigma)$ the number of σ-positive and σ-negative edges in X, respectively.

Proposition 3. *If a map σ is τ-positive (τ-negative) for some τ, then $n(X, \sigma) = 0$ ($p(X, \sigma) = 0$).*

A map σ is called *metric* if $d_X(\sigma(u), \sigma(v)) \le d_X(u, v)$ for all pairs of vertices $u, v \in V(X)$. It is easy to see that σ is metric if and only if $[\sigma(u), \sigma(v)]_X \subset \sigma([u, v]_X)$ for all $u, v \in V(X)$. A map σ is called *linear* provided $\sigma([u, v]_X) \subset [\sigma(u), \sigma(v)]_X$ for all $u, v \in V(X)$.

Proposition 4. *Let σ be a metric or a linear map. Then $n(X, \sigma) \le 1$. Moreover, the equality $n(X, \sigma) = 1$ implies $p(X, \sigma) = 0$.*

Theorem 5. *Let σ be a metric or a linear map. If $n(X, \sigma) = 0$, then there exists an orientation τ such that σ is τ-positive. Similarly, if $n(X, \sigma) = 1$ (and thus $p(X, \sigma) = 0$), then there is τ such that σ is τ-negative.*

Rerefences

[1] Chris Bernhardt. Vertex maps for trees: algebra and periods of periodic orbits. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 14(3) : 399–408, 2006.

[2] Bau-Sen Du. On the class of similar square $\{-1, 0, 1\}$-matrices arising from vertex maps on trees. Preprint, arXiv:1503.04568, 2015.

[3] Sergiy Kozerenko. Discrete Markov graphs: loops, fixed points and maps preordering. *J. Adv. Math. Stud.*, 9(1) : 99–109, 2016.

Constructive description of G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternions

Tetyana Kuzmenko
(Institute of Mathematics of NAS, Kyiv)
E-mail: kuzmenko.ts15@gmail.com

Let $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ be the quaternion algebra over the field of complex numbers $\mathbb{C}$, whose basis consists of the unit 1 of the algebra and of the elements I, J, K satisfying the multiplication rules:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

In the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ there exists another basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ such that multiplication table in a new basis can be represented as

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

.

The unit of the algebra can be decomposed as $1 = e_1 + e_2$.

Let us consider the vectors

$$i_1 = e_1 + e_2, \quad i_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2, \tag{1}$$

where $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, which are linearly independent over the field of real numbers $\mathbb{R}$. It means that the equality $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 = 0$ for $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ holds if and only if $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

In the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ we consider the linear span

$$E_3 := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

generated by the vectors i_1, i_2, i_3 over the field $\mathbb{R}$.

In the paper [1] we introduced a new class of quaternionic mappings, so-called, G-monogenic mappings.

A continuous mapping $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ $\big($or $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})\big)$ is *right-G-monogenic* $\big($or *left-G-monogenic*$\big)$ in a domain $\Omega_\zeta \subset E_3$, if Φ $\big($or $\widehat{\Phi}\big)$ is differentiable in the sense of the Gâteaux at every point of Ω_ζ, i. e. for every $\zeta \in \Omega_\zeta$ there exists an element $\Phi'(\zeta) \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ $\big($or $\widehat{\Phi}'(\zeta) \in \mathbb{H}(\mathbb{C})\big)$ such that

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \Big(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\Big)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3$$

$$\left(\text{or} \quad \lim_{\varepsilon \to 0+0} \Big(\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)\Big)\,\varepsilon^{-1} = \widehat{\Phi}'(\zeta) h \quad \forall\, h \in E_3\right).$$

We introduce linear functionals $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ and $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ by setting

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$

$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0.$$

Denote by $f_k(E_3) := \{f_k(\zeta) : \zeta \in E_3\}$ for $k = 1, 2$.

Note that the points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ corresponding to the non-invertible elements $\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 \in E_3$ lie on the straight lines

$$L^1 : \; x + y \mathrm{Re}\, a_1 + z \mathrm{Re}\, b_1 = 0, \qquad y \mathrm{Im}\, a_1 + z \mathrm{Im}\, b_1 = 0,$$

$$L^2 : \; x + y \mathrm{Re}\, a_2 + z \mathrm{Re}\, b_2 = 0, \qquad y \mathrm{Im}\, a_2 + z \mathrm{Im}\, b_2 = 0$$

in the three-dimensional space $\mathbb{R}^3$.

Denote by

$$D_1 := f_1(\Omega_\zeta) \subset \mathbb{C}, \qquad D_2 := f_2(\Omega_\zeta) \subset \mathbb{C}.$$

In the following theorems we established constructive description of all G-monogenic mappings using four analytic functions of the complex variable.

Theorem 1. *Let a domain Ω be convex in the direction of the straight lines L^1 and L^2 and let $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Then every right-$G$-monogenic mapping $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ has the form*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4,$$

where F_1 and F_3 are functions of the variable $\xi_1 := x + ya_1 + zb_1$ analytic in the domain D_1, and F_2 and F_4 are functions of the variable $\xi_2 := x + ya_2 + zb_2$ analytic in the domain D_2.

Theorem 2. *Let a domain Ω be convex in the direction of the straight lines L^1 and L^2 and let $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Then every left-$G$-monogenic mapping $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ has the form*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4,$$

where $\widehat{F}_1$ and $\widehat{F}_4$ are functions of the variable $\xi_1 := x + ya_1 + zb_1$ analytic in the domain D_1, and $\widehat{F}_2$ and $\widehat{F}_3$ are functions of the variable $\xi_2 := x + ya_2 + zb_2$ analytic in the domain D_2.

Rerefences

[1] V. S. Shpakivskyi, T. S. Kuzmenko. On one class of quaternionic mappings. *Ukr. Math. J.*, 68(1) : 127 – 143, 2016.

Moyal and Rankin-Cohen deformations of algebras

Volodymyr Lyubashenko
(Institute of Mathematics, 3 Tereshchenkivska st., Kyiv, 01004, Ukraine)
E-mail: lub@imath.kiev.ua

Denote $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$. The left action

$$SL(2,\mathbb{R}) \times (\mathbb{H} \times \mathbb{C}^\times) \to \mathbb{H} \times \mathbb{C}^\times, \qquad \gamma(z,X) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{X}{cz+d}\right),$$

where $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, induces the right action of $SL(2,\mathbb{R})$ on the algebra of holomorphic functions $\mathcal{H}ol(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^\times)$. The restriction of this action to the subspace $X^k\mathcal{H}ol(\mathbb{H})$, $k \in \mathbb{Z}$, equips $\mathcal{H}ol(\mathbb{H})$ with the right action $|_k$ of $SL(2,\mathbb{R})$. These actions are important in the definition of modular (automorphic) forms [4]. The Rankin–Cohen brackets on this subalgebra were defined in [1] as follows. Let $k, l \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $f, g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{H})$. Then

$$[X^k f, X^l g]_n^{RC} = X^{k+l+2n} \sum_{r+s=n}^{r,s\geqslant 0} (-1)^s \binom{k+n-1}{s} \binom{l+n-1}{r} f^{(r)} g^{(s)},$$

where $f^{(r)} = \partial_z^r f$. Cohen proved in [1, Theorem 7.1] that the operation $[\_,\_]_n^{RC}$ on $\mathcal{H}ol(\mathbb{H})[X^{-1}, X]$ is $SL(2,\mathbb{R})$-equivariant. A *deformation* of an associative $\mathbb{C}$-algebra $(A, m : A \otimes A \to A)$ is a $\mathbb{C}$-bilinear map $\mu : A \times A \to A[[\hbar]]$, $\mu(a,b) = \sum_{n=0}^\infty \hbar^n \mu_n(a,b)$ such that

$$\mu_0(a,b) = m(a \otimes b) = ab, \qquad \mu(1,a) = a = \mu(a,1)$$

and the $\mathbb{C}[[\hbar]]$-bilinear map $\tilde{\mu} : A[[\hbar]] \times A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$, which extends μ by $\mathbb{C}[\hbar]$-bilinearity and $\hbar$-adic continuity, is associative. Let $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Der} A$ be an abelian $\mathbb{C}$-subalgebra of the Lie $\mathbb{C}$-algebra of derivations of A. View an element $P = \sum_{i=1}^l \xi_i \otimes \eta_i \in \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}$ as a $\mathbb{C}$-linear operator $A^{\otimes 2} \to A^{\otimes 2}$. It is well-known that

$$a \star_P b \equiv \mu_P(a,b) = m \exp(\hbar P).(a \otimes b) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\hbar^n}{n!} P^n.(a \otimes b)$$

is a deformation of A. An example is provided by the Moyal deformation of $A = \mathcal{H}ol(\mathbb{C}^2)$, $\mathbb{C}^2 = \{(q,p)\}$, $P = M = \partial_p \otimes \partial_q - \partial_q \otimes \partial_p$. The point of this note is to show that the Rankin–Cohen brackets give a deformation, related to the Moyal deformation. This is already proven by V. Ovsienko [3] using different formulas and in a different way.

Consider the embedding

$$\Psi = \left(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \xrightarrow[\cong]{\psi} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^2\right)$$

where $\psi(z,X) = (zX^{-1}, X^{-1}) = (q,p)$. Vector field ∂_p (resp. ∂_q) on $\mathbb{C}^2$ is lifted along Ψ to vector field $\xi = -X^2\partial_X - zX\partial_z$ (resp. $\eta = X\partial_z$) on $\mathbb{H} \times \mathbb{C}^\times$. Thus, $M = \partial_p \otimes \partial_q - \partial_q \otimes \partial_p$ is lifted to $P = RC = \xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi$ and ξ and η commute. Hence,

$$F \star_{RC} G = m \exp(\hbar RC).(F \otimes G) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\hbar^n}{n!} m(RC)^n.(F \otimes G)$$

is a deformation of $\mathcal{H}ol(\mathbb{H} \times \mathbb{C}^\times)$.

Theorem 1. *Let $k, l \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Assume that $k > 0$ or $l > 0$ or $k, l \leqslant 0$, $n < \max\{1-k, 1-l\}$ or $k, l \leqslant 0$, $n > 1-k-l$. Then for all $f, g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{H})$ and $F = X^k f, G = X^l g$ we have*

$$(n!)^{-1} m(RC)^n.(F \otimes G) = [F, G]_n^{RC}.$$

Proof. The embedding $\Psi : \mathbb{H}\times\mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ is $SL(2,\mathbb{R})$-equivariant, where the left action on $\mathbb{C}^2 = \{(q,p)\}$ is the standard action of matrices on vectors. The mapping

$$M = \partial_p \otimes \partial_q - \partial_q \otimes \partial_p \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}ol(\mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{H}ol(\mathbb{C}^2))$$

commutes with the action of $SL(2,\mathbb{R})$, or, equivalently, of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Hence, the Moyal deformation is $SL(2,\mathbb{R})$-equivariant. This implies and can be checked directly that

$$RC = \xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}ol(\mathbb{H}\times\mathbb{C}^\times) \otimes \mathcal{H}ol(\mathbb{H}\times\mathbb{C}^\times))$$

commutes with the action of $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ and $SL(2,\mathbb{R})$. Thus,

$$\star_{RC} : \mathcal{H}ol(\mathbb{H}\times\mathbb{C}^\times) \otimes \mathcal{H}ol(\mathbb{H}\times\mathbb{C}^\times) \to \mathcal{H}ol(\mathbb{H}\times\mathbb{C}^\times)[[\hbar]]$$

is a homomorphism of $SL(2,\mathbb{R})$-modules. Accordingly to El Gradechi [2, Proposition 3.11] if the hypotheses on (k,l,n) hold, then there is only 1-dimensional vector space of $SL(2,\mathbb{R})$-equivariant bidifferential operators

$$(\mathcal{H}ol(\mathbb{H}), |_k) \otimes (\mathcal{H}ol(\mathbb{H}), |_l) \to (\mathcal{H}ol(\mathbb{H}), |_{k+l+2n}).$$

Both maps $f \otimes g \mapsto (n!)^{-1} m(RC)^n.(X^k f \otimes X^l g)$ and $f \otimes g \mapsto [X^k f, X^l g]_n^{RC}$ belong to this space, therefore, they are proportional. One checks that the proportionality constant is 1. In fact, evaluate both operators on the following $f \otimes g$. If $k = l = n = 0$ take $f = g = 1$. If $k > 0$ or $k < 0$, $k \leqslant l \leqslant 0$, $n < 1-k$ take $f = 1$, $g = z^n$. If $l > 0$ or $l < 0$, $l \leqslant k \leqslant 0$, $n < 1-l$ take $f = z^n$, $g = 1$. If $k, l \leqslant 0$ and $n > 1-k-l$ choose $r, s \in \mathbb{N}$, such that $r + s = n$, $r + k > 0$ and $s + l > 0$, and take $f(z) = z^r$ and $g(z) = z^s$ (use coordinates (q,p) to make the computations easier). $\square$

Corollary 2. *The Rankin–Cohen deformation $\star_{RC}$ restricted to $A^{\otimes 2}$, $A = \mathcal{H}ol(\mathbb{H})[X]$ coincides with the map $A \otimes A \to A[[\hbar]]$, $X^k f \otimes X^l g \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n [X^k f, X^l g]_n^{RC}$.*

Proof. For all $(k,l,n) \in \mathbb{N}^3$ the statement follows from Theorem 1 except for $(k,l,n) = (0,0,1)$. In the latter case $[f,g]_1 = 0 = m(RC)(f \otimes g)$ for all $f, g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{H})$. $\square$

Rerefences

[1] Henri Cohen. *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217** (1975), no. 3, 271–285.

[2] Amine M. El Gradechi. *The Lie theory of the Rankin-Cohen brackets and allied bi-differential operators*, Adv. Math. **207** (2006), no. 2, 484–531.

[3] Valentin Ovsienko. *Exotic deformation quantization*, J. Differential Geom. **45** (1997), no. 2, 390–406.

[4] Goro Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publ. of the Math. Soc. of Japan, vol. 11, Iwanami Shoten Publishers, Tokyo, 1971, Kanô Memorial Lectures, No. 1.

Fractal properties of sets associated with Markov representation of real numbers defined by a double stochastic matrix

V. Markitan
(Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Tereshchenkivska Str. 3, Kyiv)
E-mail: v.p.markitan@npu.edu.ua

Let $A = \{0, 1\}$ be a number system alphabet, $q = (q_0, q_1)$ be an ordered set of positive numbers, such that $q_0 + q_1 = 1$, $L = A \times A \times \dots$ be a sequence space, and

$$Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

be a double stochastic matrix (a matrix having nonnegative elements and such that the sum of elements in each row and each column equals 1), where $0 < a < 1$.

Define an interval system of the first rank being a partition of $[0; 1]$:

$$[0; 1] = \Delta_0 \cup \Delta_1, \text{ where } \Delta_0 = [0; q_0)\,;\ \Delta_1 = [q_0; 1]$$

An interval system of the rank n ($n \geqslant 2$) is defined by the follows conditions:

1. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0} \cup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1}$;
2. $\min\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m (i+1)} = \sup\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i},\ i = \{0, 1\}$;
3. $\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m ij}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}|} = q_{ij}$;
4. for any sequence $(c_m) \in L$ the intersection $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}$ is a point of $[0; 1]$.

A symbolic representation $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}$ of a number $x \in [0; 1]$ is called its *Markov representation.*

Theorem 1. *The set*

$$C = \{x : \quad x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots},\ c_{2k-1} c_{2k} \in \{00, 11\}\ \forall k \in \mathbb{N}\} \quad \textit{is}$$

the set of Lebesgue measure zero. Its Hausdorff-Besikovitch dimension is a unique solution of the following equation

$$a^x (a^x + (1-a)^x) = 1.$$

Theorem 2. *The set*

$$D = \{x : \quad x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots},\ c_k + c_{k+1} + c_{k+2} \neq 1\ \forall k \in \mathbb{N}\} \quad \textit{is}$$

the set of Lebesgue measure zero. Its Hausdorff-Besikovitch dimension is a unique the solution of the following equation

$$(a(1-a)^2)^x + a^x = 1.$$

Rerefences

[1] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.

Warped product semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds

Koji Matsumoto(Yamagata University)
(2-3-65 Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan)
E-mail: tokiko_matsumoto@yahoo.com

On 1994, in [7], N. Papaghiuc introduced the notion of semi-slant submanifolds in a Hermitian manifold which is a generalization of CR- and slant-submanifolds ([1],[3],[4]). In particular, he considered this submanifold in Kaehlerian manifolds ([7]). Then, on 2007, V. A. Khan and M. A. Khan considered this submanifold in a nearly Kaehler manifold and obtained interesting results ([5]).

Recently, we considered semi-slant submanifolds in a locally conformal Kaehler manifold. We gave a necessary and sufficient conditions the two distributions (holomorphic and slant) be integrable. Moreover, we considered these submanifolds in a locally conformal Kaehler space form ([6]).

In this talk, we define 2-type warped product semi-slant submanifolds in an locally conformal Kaehler manifold which are the generalization of warped product CR-submanifolds ([2]) and consider some properties of these submanifolds. In particular, we mainly consider the first type warped product semi-slant submanifolds in an l.c.K.-space form.

Rerefences

[1] A. Bejancu, *Geomerty of CR-submanifolds,* D. Reidel Publishing Company, (1986).
[2] V. Bonanzinga and K. Matsumoto, *Warped product CR-submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds,* Periodica Math. Hungarica, **48** (2-2) (2004), 207–221.
[3] B. Y. Chen, *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I and II*, J. of Differential Geometry, **16**, 305–322 and 493–509(1981).
[4] B. Y. Chen, *Geometry of slant submanifolds*, Katholieke Univ. Leuven, (1990).
[5] V. A. Khan and M. A. Khan, *Semi-slant submanifolds of a nearly Kaehler manifold*, Turk J. Math., **31**(2007), 341–353.
[6] K. Matsumoto, *On semi-slant submanifolds of locally conformal Kähler space form*, to appear.
[7] N. Papaghiuc, *Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold*, An. St. Univ. Al. I. Cuza, Iasi, **40**, 55–61 (1994).

Weak and strong nilpotentizability in the monster towers hosting flag distributions

Piotr Mormul
(Institute of Mathematics, University of Warsaw, Warsaw, Poland)
E-mail: mormul@mimuw.edu.pl

Control systems linear in controls, with linearly independent vector field' generators, sometimes happen to be locally nilpotentizable. That is, to locally possess bases that generate (over reals, not over functions) nilpotent algebras of vector fields. The existence of a nilpotent basis may be somehow mischievously hidden in the nature of a system. When it exists and is at hand, a number of key control problems related with the system (e. g., motion planning) become much simpler. We call such systems *weakly* nilpotent. When a system Σ is given globally on a manifold M, we call weakly nilpotent those points in M, around which Σ is weakly nilpotent.
In turn, *strongly* nilpotent are those points p in M, around which Σ is equivalent to its *nilpotent approximation* at p. Naturally, 'strongly' implies 'weakly', but not vice versa: 'strongly' appears to be a much more stringent property.
An important class of weakly nilpotentizable distributions are *Goursat* distributions – members of Goursat *flags* which live on so-called Monster Manifolds ([2]). Local nilpotent bases found for Goursat distributions permit much more – to compute the *nilpotency orders* (sometimes also called 'indices', sometimes 'steps') of the generated real Lie algebras, see [3].
A big problem, with only partial answers known to-date, reads

Problem 1. What points in the Goursat Monster Tower are strongly nilpotent?

In parallel, much ampler classes of globally weakly nilpotent distributions are being furnished by so-called *special m-flags*, $m \geqslant 2$. Those are induced by rather particular rank-$(m+1)$ subbundles $D \subset TM$, $\dim M = (r+1)m + 1$, r = the length of a flag. The defining conditions demand that the tower of consecutive Lie squares of D

$$D \subset [D,\, D] \subset [[D,\, D],\, [D,\, D]] \subset \cdots\cdots \subset TM \tag{1}$$

grow in ranks, at every point of M, in the arithmetical progression $m+1,\, 2m+1,\, 3m+1, \ldots,\, (r+1)m+1 = \dim M$ and that the associated subtower of Cauchy-characteristic subdistributions $L(D) \subset L([D,\, D]) \subset L([[D,\, D],\, [D,\, D]]) \subset \cdots$ also grow in ranks arithmetically $m,\, 2m,\, 3m,\, \ldots,\, (r-1)m,\, rm$. (The biggest term in this subtower is, strictly speaking, not Cauchy-characteristic, but so-called *covariant subdistribution* of the one before last term in the main tower (1). More on that see, e. g., [1] and [4].)
Much like for Goursat structures, there exist huge manifolds locally universal for the special m-flags of any fixed length r. Upon floating r, one gets a tower of such manifolds. Each member of any special m-flag is locally materialized – up to the local diffeo equivalence – somewhere on certain stage of the tower. This is precisely the mentioned local universality of the tower. All such distributions are globally weakly nilpotent, and relevant local nilpotent bases for them can be effectively constructed. They depend on a natural stratification of germs of special m-flags into so-called *singularity classes*, [5]. The Lie algebras that are generated depend *but* on singularity classes, and the same, obviously, holds for the nilpotency orders. Those orders can by effectively written down (and computed) [4].
In contrast, it is not known (excepting, that is true, many simple cases)

Problem 2. What points in the Special m-Flags' Monster Towers are strongly nilpotent ?

Also, barring a few relatively simple situations, it is not known

Problem 3. What are the dimensions of the nilpotent real Lie algebras mentioned in the present abstract?

The nilpotency orders are tractable, but not the real dimensions.

Rerefences

[1] Antonio Kumpera & Jacques Rubin. Multi-flag systems and ordinary differential equations. *Nagoya Mathematical Journal* **166** (2002), 1 – 27.

[2] Richard Montgomery & Michail Zhitomirskii. Points and Curves in the Monster Tower. *Memoirs of the American Mathematical Society* **956** (2010).

[3] Piotr Mormul. Goursat distributions not strongly nilpotent in dimensions not exceeding seven. Volume **281** (2003) of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 249 – 261.

[4] Piotr Mormul. Multi-dimensional Cartan prolongation and special k-flags. Volume **65** (2004) of *Banach Center Publications*, 157 – 178.

[5] Piotr Mormul. Singularity classes of special 2-flags. *SIGMA* **5** (2009), 102, 22 pages (electronic).

The local density and the local weak density of N_τ^φ-kernel of a topological space X and superextensions

Mukhamadiev F.G.
(Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: farkhod8717@mail.ru

Definition 1. *The weak density of a topological space X is the smallest cardinal number $\tau \geqslant \aleph_0$ such that there is a π-base in X coinciding with τ centered systems of open sets, i.e. there is a π-base $B = \bigcup \{B_\alpha : \alpha \in A\}$, where B_α is a centered system of open sets for each $\alpha \in A$ and $|A| = \tau$ [1].*

The weak density of a topological space X is denoted by $wd(X)$. If $wd(X) = \aleph_0$ then we say that a topological space X is weakly separable.

Definition 2. *We say that a topological space X is locally separable at a point $x \in X$ if x has a separable neighborhood [2].*

A topological space is locally separable if it is locally separable at each point $x \in X$.

Definition 3. *We say that a topological space X is locally τ-dense at a point $x \in X$ if τ is the smallest cardinal number such that x has a τ -dense neighborhood in X.*

The local density at a point x is denoted by $ld(x)$. The local density of a space X is defined as the supremum of all numbers $ld(x)$ for $x \in X$; this cardinal number is denoted by $ld(X)$.

Definition 4. *A topological space is locally weakly τ dense at a point $x \in X$ if τ is the smallest cardinal number such that x has a neighborhood of weak density τ in X*

The local weak density at a point x is denoted by $lwd(x)$.

The local weak density of a topological space X is defined with following way: $lwd(X) = \sup\{lwd(x) : x \in X\}$.

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called *linked* if any two elements from ξ intersect. Any linked system can be complemented to a maximal linked system (MLS), but this complement is, as a rule, not unique [3].

Proposition 1 [3]. *A linked system ξ of a space X is a MLS iff it possesses the following completeness property:*

if a closed set $A \subset X$ intersects with any element form ξ, then $A \in \xi$.

Denote by λX the set of all MLS of the space X. For an open set $U \subset X$, set

$$O(U) = \{\xi \in \lambda X : \text{ there is an } F \in \xi \text{ such that } F \subset U\}.$$

The family of subsets in the form of $O(U)$ covers the set λX $(O(X) = \lambda X)$, that's why it forms an open subbase of the topology on λX. The set λX equipped with this topology is called *the superextension* of X.

A.V. Ivanov defined the space NX of complete linked systems (CLS) of a space X in a following way:

Definition 5. A linked system M of closed subsets of a compact X is called *a complete linked system* (a CLS) if for any closed set of X, the condition

"Any neighborhood OF of the set F consists of a set $\Phi \in M$"

implies $F \in M$[2].

A set NX of all complete linked systems of a compact X is called *the space NX of CLS of X*. This space is equipped with the topology, the open basis of which is formed by sets in the form of $E = O(U_1, U_2, \ldots, U_n)\langle V_1, V_2, \ldots, V_s\rangle = \{M \in NX :$ for any $i = 1, 2, \ldots, n$ there exists $F_i \in M$ such that $F_i \subset U_i$, and for any $j = 1, 2, \ldots, s$, $F \cap V_j \neq \varnothing$ for any $F \in M\}$, where $U_1, U_2, \ldots, U_n, V_1, V_2, \ldots, V_s$

are nonempty open in X sets [4].

Definition 6. Let X be a compact space, φ be a cardinal function and τ be an arbitrary cardinal number. We call *an N_τ^φ - kernel* of a topological space X the space

$$N_\tau^\varphi X = \{M \in NX : \exists F \in M : \varphi(F) \leq \tau\}.$$

Theorem 7. *Let X be an infinite T_1-space and $h\varphi(X) \leq \tau$. Then*
1) $ld(\lambda X) = ld(N_\tau^\varphi X)$;
2) $lwd(\lambda X) = lwd(N_\tau^\varphi X)$.

Rerefences

[1] Fedorchuk V.V., Filippov V.V., *Topology of hyperspaces and its applications*, Moscow: Mathematics, Cybernetics, V.4.(1989) 48 p.

[2] Engelking R., *General topology*, (Moscow: Mir), 1986, 752 p.

[3] Fedorchuk V. V., Filippov V. V. General Topology. Basic Constructions. *Fizmatlit, Moscow*, 2006.

[4] Ivanov A. V. *A space of complete linked systems*, volume 27 of *Siberian Mathematical Journal*. 1986. pp. 863-875.

A study for decision making problems by using interval soft sets

Zahir Muradoglu
(Department of Mathematics, Kocaeli University, Kocaeli, 41380-Turkey)
E-mail: zahir@kocaeli.edu.tr

Cigdem Gunduz Aras
(Department of Mathematics, Kocaeli University, Kocaeli, 41380-Turkey)
E-mail: caras@kocaeli.edu.tr

The soft set theory, initiated by Russian researcher Molodtsov in 1999, is one of the branches of mathematics. The theory aims to describe phenomena and concepts of an ambiguous, vague, undefined and imprecise meaning. The soft set theory has a rich potential for applications in several directions, a few of which were demonstrated by Molodtsov in his first work [1]. After Molodtsov's work, many researcher concerned with soft sets and presented an application of soft sets in a decision making problem. Interval set theory and soft set theory are mathematical tools for dealing with uncertainty information. So Xiaohong Zhang [2] introduced the new notion of interval soft sets as a combination of interval set and soft set.

In this paper we study interval soft set theory for dealing with uncertainty information. By using the concepts of interval choice values, we apply the theory of interval soft sets to solve a soft max-min decision making for a multiple choose selection.

Rerefences

[1] D. Molodtsov. Soft set theory- first results.*Computers and Mathematics with Applications*, 37: 19-31, 1999.

[2] X. Zhang. On interval soft sets with applications. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 7(1): 186-196, 2014.

[3] N. Çağman and S. Enginoğlu. Soft matrix theory and its decision making.*Computers and Mathematics with Applications*, 59: 3308-3314, 2010.

Archimedean copula functions and their some algebraic properties with applications

Muradov Rustamjon Sobitkhonovich
(Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi)
E-mail: `rustamjonmuradov@mail.ru`

The word "copula" was first used in a mathematical sense by Sklar (1959, see [3]). But the functions themselves predate the use of the term, appearing in the work of Hoeffding, Fréchet, Dall'Aglio, and many others(see, [2]). Over the past forty years or so, copulas have played an important role in finance, engineering, bio-medical research, hydrology, climate and weather research, social research, econometrics, insurance, statistical research, dynamical systems and many areas. Axiomatically, a copula can be defined as follows.

Definition 1. A two-dimensional copula C is a mapping from $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ to $I = [0,1]$ which satisfies the following three conditions:

1. $C(u,0) = C(0,u) = 0$ for every $u \in [0,1]$;
2. $C(u,1) = C(1,u) = u$ for every $u \in [0,1]$;
3. $C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0$ for every $u_1, v_1, u_2, v_2 \in [0,1]$ satisfying $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$.

For example of copulas are the product or independence copula $C_{\perp}(u,v) = uv$, minimum copula $C_{min}(u,v) = min(u,v)$ and maximal copula $C_{max}(u,v) = max(u+v-1,0)$. In figure 1 we present the graphs of the copulas $C_{\perp}$, C_{min} and C_{max}.

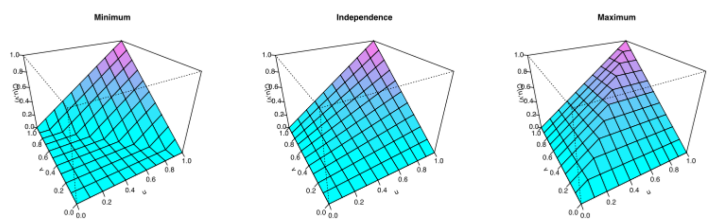


FIGURE 1.1. Graphs of the copulas $C_{\perp}$, C_{min} and C_{max}.

In this work, we discuss an important class of copulas known as Archimedean copulas. These copulas find a wide range of applications for a number of reasons: 1) the ease with which they can be constructed; 2) the great variety of families of copulas which belong to this class; and 3) the many nice properties possessed by the members of this class.

Let φ be a continuous, strictly decreasing function from $[0,1]$ to $[0,\infty]$such that $\varphi(1) = 0$.

Definition 2. The pseudo-inverse of φ is the function $\varphi^{[-1]}$ with $Dom\varphi^{[-1]} = [0,\infty]$ and $Ran\,(f)$ given by

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 < t < \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Note that $\varphi^{[-1]}$ is continuous and no increasing on $[0,\infty]$, and strictly decreasing on $[0,\varphi(0)]$. Furthermore,

$$\varphi\big(\varphi^{[-1]}(t)\big) = \begin{cases} t, & 0 < t < \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} = \min\left(t, \varphi\left(0\right)\right)$$

If $\varphi(0) = \infty$, then $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Definition 3. Copulas of the form

$$C\left(u,v\right)=\varphi^{[-1]}\left(\varphi\left(u\right)+\varphi\left(v\right)\right), \tag{2}$$

are called Archimedean copulas, where the function φ is called a generator of the copula $\varphi\left(1\right)=0$.

Theorem 4. *Let φ be a continuous, strictly decreasing function from I to $[0,\infty]$ such that $\varphi(1)=0$, and let $\varphi^{[-1]}$ be the pseudo-inverse of φ defined by (2)(taken from* [2]*). Then the function C given by (3) is a copula if and only if φ is convex.*

We conclude this work with two theorems concerning some algebraic properties of Archimedean copulas.

Theorem 5. *Let C be an Archimedean copula (taken from* [2]*) with generator φ. Then:*

1. *C is symmetric, i.e., $C(u,v)=C(v,u)$ for all u,v in I;*
2. *C is associative, i.e., $C(C(u,v),w)=C(u,C(v,w))$ for all u,v,w in I;*
3. *If $c>0$ is any constant, then $c\varphi$ is also a generator of C.*

For convenience, let Ω denote the set of continuous strictly decreasing convex functions φ from I to $[0,\infty]$ with $\varphi(1)=0$. By now the reader is surely wondering about the meaning of the term "Archimedean" for these copulas. Recall the Archimedean axiom for the positive real numbers: If a,b are positive real numbers, then there exists an integer n such that $na>b$. An Archimedean copula behaves like a binary operation on the interval I, in that the copula C assigns to each pair u,v in I a number $C(u,v)$ in I. From Theorem 5, we see that the "operation" C is commutative and associative, and preserves order, i.e., $u_1\le u_2$ and $v_1\le v_2$ implies $C(u_1,v_1)\le C(u_2,v_2)$. Algebraists call (I,C) an ordered Abelian semigroup. For any u in I, we can define the C-powers u_C^n of u recursively: $u_C^1=u$, and $u_C^{n+1}=C(u,u_C^n)$, note that u_C^2 belongs to the diagonal section $\delta_C(u)$ of C. The version of the Archimedean axiom for (I,C) is, for any two numbers u,v in $(0,1)$, there exists a positive integer n such that $u_C^n<\nu$. The next theorem shows that Archimedean copulas satisfy this version of the Archimedean axiom and hence merit their name. The term "Archimedean" for these copulas was introduced in Ling (1965, see [2]).

Theorem 6. *Let C be an Archimedean copula (taken from* [2]*) generated by φ in Ω. Then for any u,v in I, there exists a positive integer n such that $u_C^n<\nu$.*

In many applications, the random variables(r.v.-s) of interest represent the lifetimes of individuals or objects in some population. In survival analysis our interest focuses on a nonnegative r.v.-s denoting death times of biological organisms or failure times of mechanical systems. A difficulty in the analysis of survival data is the possibility that the survival times can be subjected to random censoring by other nonnegative r.v.-s and therefore we observe incomplete data. In article [1] we consider only right censoring model and problem of estimation of survival function when the survival times and censoring times are dependent and estimates of survival function assuming that the dependence structure is described by a known Archimedean copula function. We demonstrate almost sure asymptotic representation which provides a key tool for obtaining weak convergence result for estimator.

Rerefences

[1] Abdushukurov A.A.,Muradov R.S. Some algebraic proporties of Archimedian copula functions and their applications in statistical estimation of the survival function, *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(3): 88–98, 2016.

[2] Nelsen R.B. An Introduction to Copulas. Springer, New York, 2006.

[3] Sklar A. Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges, Vol.8. of *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 229–231, 1959.

BPS states of Fourfolds as candidates for Kaluza-Klein modes

Obikhod Tetiana V.
(Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, 03028, Kiev, Prospect Nauki, 47)
E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

Within the framework of the cosmological theory of the Big Bang, F-theory is represented that unifies all four types of fundamental interactions [1]. Among the most exciting predictions of physics beyond the Standard Model is the assumption of the space of extra dimensions [2] that solves the problem of the hierarchy of interactions. With the presence of this extra dimensions are connected the searches for Kaluza-Klein (KK) partners of gravitons, gauge bosons and microscopic black holes at the Large Hadron Collider (LHC). The theoretical models of the space of extra dimensions are models of Arkani-Hamed, Dimopoulos and Dvali and of Randall, Sundrum. In the framework of F-theory is considered the fourfold [3], as a space of extra dimensions, the choice of which is dictated by the "good" group of holonomy. We study the duality between the F-theory compactified on the K3-surface and $E8 \times E8$ heterotic string compactified on the torus T^2. The set of BPS states corresponding to the Calabi-Yau fourfolds, which has either an elliptic curve or a K3-fibration as a layer, is studied in the aspect of correspondence to the KK modes of the M-theory on $R^8 \times (S^1 \times S^1 = T^2) \times S^1/Z_2$ [4]. The singularities of the moduli space of the Calabi-Yau fourfold make it possible to observe massive KK modes [5], the masses of which are obtained from the M-theory of supergravity. The result is of interest for a theoretical understanding of the KK modes, the experimental searches for which are carried out at the LHC [6].

Rerefences

[1] Cumrun Vafa. Evidence for F-theory. *Nucl. Phys.*, B469: 403–418, 1996.
[2] Yuri A. Kubyshin. Models with Extra Dimensions and Their Phenomenology. arXiv:hep-ph/0111027v2.
[3] 3. A. Klemm, B. Lian, S-S. Roan and S-T. Yau. Calabi-Yau fourfolds for M- and F-Theory compactifications. hep-th/9609239.
[4] 4. Petr Horava, Edward Witten. Heterotic and Type I string dynamics from eleven dimensions. *Nucl. Phys.*, B460: 506–524, 1996.
[5] Albrecht Klemm, Peter Mayr and Cumrun Vafa. BPS States of Exceptional Non-Critical Strings. hep-th/9607139.
[6] Lisa Randall. Extra Dimensions and Warped Geometries. *Science*, 296 (5572): 1422–1427, 2002.

Landau-type inequalities for curves on Riemannian manifolds

Igor O. Parasyuk
(National Taras Shevchenko University of Kyiv, Volodymyrs'ka str., 64, Kyiv, Ukraine, 01601)
E-mail: `pio@univ.kiev.ua`

Let for a natural number n a function $f(\cdot) \in \mathrm{C}^n\,(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ satisfy the inequalities

$$\|f(\cdot)\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < \infty, \quad \left\|f^{(n)}(\cdot)\right\|_\infty < \infty.$$

In the case where $n = 2$, the famous Landau –Hadamard inequality reads

$$\|f'(\cdot)\|_\infty \leqslant \sqrt{2\,\|f(\cdot)\|_\infty \,\|f''(\cdot)\|_\infty}.$$

In the general case $n \geq 2$, $1 \leqslant k < n$, Kolmogorov determined the best constants $C_{n,k}$ for inequality

$$\left\|f^{(k)}(\cdot)\right\|_\infty \leqslant C_{n,k}\,\|f(\cdot)\|^{1-k/n} \left\|f^{(n)}(\cdot)\right\|_\infty^{k/n}.$$

(see, e.g., [1]). The goal of the present report is to discuss how the above inequalities can be generalized for the case of mappings taking values in Riemannian manifolds.

Let $(\mathcal{M}, \mathfrak{g} = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ be a smooth complete Riemannian manifold with the metric tensor $\mathfrak{g}$, and let ∇ be the Levi-Civita connection with respect to $\mathfrak{g}$. For a given smooth mapping $x(\cdot) : I \mapsto \mathcal{M}$ of an interval $I \subset \mathbb{R}$ and for a smooth vector field $\xi(\cdot) : I \mapsto T\mathcal{M}$ along $x(\cdot)$, denote by $\nabla_{\dot{x}}\xi(t)$ the covariant derivative of $\xi(\cdot)$ along the tangent vector $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}\mathcal{M}$ at the point $t \in I$, and by $\nabla^k_{\dot{x}}$ the k-th iterate of $\nabla_{\dot{x}}$. (Here $T\mathcal{M} = \bigsqcup_{x\in\mathcal{M}} T_x\mathcal{M}$ stands for the total space of the tangent bundle with natural projection $\pi(\cdot) : T\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$, and $T_x\mathcal{M} = \pi^{-1}(x)$ denotes the tangent space to $\mathcal{M}$ at x.)

For a smooth function $U(\cdot) : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ denote by $\nabla U(x) \in T_x\mathcal{M}$ and by $H_U(x) : T_x\mathcal{M} \mapsto T_x\mathcal{M}$, respectively, the gradient vector and the Hesse form of $U(\cdot)$ at point x (by the definition

$$\langle H_U(x)\xi, \eta\rangle = \langle \nabla_\xi \nabla U(x), \eta\rangle$$

for any $x \in \mathcal{M}$ and any $\xi, \eta \in T_x\mathcal{M}$). Define the natural norm for tangent vector ξ as $\|\xi\| := \sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}$ and the norm for vector field $\xi(\cdot)$ along $x(\cdot)$ as

$$\|\xi(\cdot)\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi(t)\|.$$

We obtain the following Landau-type inequality.

Theorem 1. *Let $x(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$ be a smooth mapping such that*

$$\|\nabla_{\dot{x}}\dot{x}(\cdot)\|_\infty < \infty.$$

Suppose that there exists a smooth function $U(\cdot) : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ satisfying the inequalities

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} U \circ x(t) < \infty, \quad \|\nabla U \circ x(\cdot)\|_\infty < \infty,$$

and

$$\lambda := \inf_{t\in\mathbb{R}} \min\left\{\langle [H_U \circ x(t)]\,\xi, \xi\rangle : \xi \in T_{x(t)}\mathcal{M},\ \|\xi\| = 1\right\} > 0.$$

Then

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_\infty \leqslant C\sqrt{\|\nabla U \circ x(\cdot)\|_\infty \,\|\nabla_{\dot{x}}\dot{x}(\cdot)\|_\infty /\lambda}$$

where the constant C does not exceed the positive root of the equation $\zeta^3 - 3\zeta = 1$. In particular, $C < 1.87939$.

Remark 2. If $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ and $U(x) := \|x\|^2/2$, then $\lambda = 1$, and Theorem 1 leads to the Landau inequality with the constant C somewhat greater then the best one $C_{2,1} = \sqrt{2}$.

If the closure of $x(\cdot)$ is a compact subset $\mathcal{K}$ of a domain $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ and there exists a point $x_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{K}$ such that the distance function

$$\rho(\cdot, x_0) : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \mapsto (0, \infty)$$

is smooth, then Theorem 1 holds true for $U(x) := \rho^2(x, x_0)$.

It turns out that it is much easier to obtain a counterpart of the Landau – Kolmogorov inequality for vector fields along mappings.

Theorem 3. *Let $\xi(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto T\mathcal{M}$ be a smooth vector field along a smooth mapping $x(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}$ and let $n \geqslant 2$ be a natural number. Suppose that*

$$\|\xi(\cdot)\|_\infty < \infty, \quad \|\nabla_{\dot{x}}^n \xi(\cdot)\|_\infty < \infty.$$

Then for any natural $k < n$ there holds the inequality

$$\left\|\nabla_{\dot{x}}^k \xi(\cdot)\right\|_\infty \leqslant C_{n,k} \|\xi(\cdot)\|_\infty^{1-k/n} \|\nabla_{\dot{x}}^n \xi(\cdot)\|_\infty^{k/n}$$

where $C_{n,k}$ are the Kolmogorov constants.

Rerefences

[1] Steven R. Finch. *Mathematical constants*, volume 94 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

Morse-Smale flows on torus with hole

Aleksandr Prishlyak
(Taras Shevchenko National University of Kiev, Ukraine)
E-mail: prishlyak@yahoo.com

Andrey Prus
(Taras Shevchenko National University of Kiev, Ukraine)
E-mail: andrei.prus@mail.ru

We consider the Morse-Smale flows. Let consider the torus with a hole and Morse-Smale flows [1] on it. Similarly Morse-Smale flows on closed surfaces those flows also are structurally stable and form an open everywhere dense set of all flows on the surface with boundary [2] .

For a torus with hole there exist two separatrices, cutting through which we obtain a simply connected domain. Boundary of this area can be viewed as a circle containing this separatrix. Others separatrices can be considered as the chords on the circle.

Describe the process of transformation diagrams

Diagram can cut along a chord, obtained curvilinear polygons can glue along one pair of separatrices on the circle. Obtained curvilinear polygon again can be considered as chord diagram.

Two diagrams are called equal if one of them can be obtained from another by rotation or symmetry and called equivalent if one of them can be obtained from another by a process of transformation diagrams.

Theorem 1. *Two Morse-Smale flows are equivalent iff their diagrams are equivalent.*

For torus with hole and with 8 singular points(on the boundary) we obtained a set of 106 possible diagrams, but it was found that a large number of diagrams are equivalent. As a result, we obtained 18 equivalence classes hence we counted the number of topological non-equivalent Morse-Smale flows on this surface.

Rerefences

[1] M.J Pacifico. *Stability of Morse-Smale vector fields on manifolds with boundary* Journal of Differential Equations 54(3):346-372 · September 1984.

[2] Jacob PalisJr., Welington de Melo *Genericity and Stability of Morse-Smale Vector Fields* Geometric Theory of Dynamical Systems ISBN 978-1-4612-5703-5

On nuclear operators with $trace\, V = 1$ and $V^2 = 0$

Oleg Reinov
(Saint-Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St. Petersburg, 198504 Russia)
E-mail: `orein51@mail.ru`

In 1955, A. Grothendieck [2] has introduced the notion of the approximation property and has shown that *there exists a Banach space without the approximation property iff there exists an operator* $U : c_0 \to c_0$ *such that the (nuclear) trace of* U *equals 1 but* $U^2 = 0$ *identically* [2, Chap. I, "Proposition" 37. $(a') \Leftrightarrow (f'')$, pp. 170-171].

Recall that a Banach space X has the approximation property if the identity map id_X can be approximated, in the topology of compact convergence, by finite rank operators.

An operator $T : X \to X$ is said to be s-nuclear $(0 < s \leqslant 1)$ if there are linear continuous functionals $(f_k) \subset X^*$ and elements $(x_k) \subset X$ so that $\sum ||f_k||^s\, ||x_k||^s < \infty$ and $T(x) = \sum f_k(x)x_k$ for every $x \in X$. They say "nuclear operator" if $p = 1$.

After Per Enflo's construction of a Banach space without the approximation property [1], it was shown (see e.g. [3, 10.4.5]) that there are not only nuclear operators in c_0 with the above property but also there exists a nuclear operator T in l^1 which is s-nuclear for every $s \in (2/3, 1]$ and such that $trace\, T = 1$ and $T^2 = 0$.

We discuss a way to get the nuclear operators of such a kind in the spaces l^p, for all $p > 1, p \neq 2$ (in c_0 for $p = \infty$):

Theorem 1. *Let* $p \in [1, \infty], p \neq 2$, $1/r = 1 + |1/2 - 1/p|$. *There exists a nuclear operator* V *in* l^p *(in* c_0 *for* $p = \infty$*) such that*

(1) V *is* s*-nuclear for each* $s \in (r, 1]$;
(2) V *is not* r*-nuclear;*
(3) trace $V = 1$ *and* $V^2 = 0$.

Theorem 2. *Theorem 1 is optimal with respect to* p *and* r.

Note that for $p = \infty$ we have $r = 2/3$.

We give also some applications.

Rerefences

[1] Per Enflo. A counterexample to the approximation property in Banach spaces. *Acta Mathematica*, 130 : 309–317, 1973.
[2] Alexander Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques et éspaces nucléaires*, volume 16 of *Memoires of American Mathematical Society.* 1955.
[3] A. Pietsch. *Operator Ideals.* North Holland, 1980.

Multiple roots of the volume polynomials for polyhedra

I. Kh. Sabitov
(Russia, Lomonosov Moscow State University)
E-mail: isabitov@mail.ru

In our work [1] among the open questions we have formulated under the number 6 a conjecture that the volume of any infinitesimally non-rigid polyhedron should be a multiple root of its volume polynomial. Now we can present a proof of this conjecture. As a consequence we have that the volume of any flexible polyhedron is a multiple root of its volume polynomial.

Rerefences

[1] Idzhad Sabitov. Algebraic theory of the slution of polyhedra.*Russian Mathematical Surveys*, 66(3) : 3–66, 2011.

Theory of gravity in the affine frame

S. Samokhvalov
(DDTU, Kamyanske, Ukraine)
E-mail: `serg_samokhval@ukr.net`

Let $e_a = h^\mu_a \partial_\mu$ by the affine frame in the Riemann space, $g_{ab} = e_a \cdot e_b$ and $F^a_{\mu\nu} = \partial_\nu h^a_\mu - \partial_\mu h^a_\nu$ – non-holonomity coefficients. Suppose, that γ^a_{bc} is coefficients of the torsion-free and metric-compatible affine connection in the affine frame e_a, so $F^a_{bc} = \gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb}$ and $g_{ab,c} = \gamma^{\cdot}_{acb} + \gamma^{\cdot}_{bca}$. The Riemann curvature scalar $R = \delta^{\mu\nu}_{ab} g^{bd}(\partial_\mu \gamma^a_{\nu d} + \gamma^a_{\mu c}\gamma^c_{\nu d})$, where $\delta^{\mu\nu}_{ab}$ - alternator, decompose into $R = -L_\gamma + \frac{1}{e}\partial_\mu(eV^\mu)$, where $e^2 = det\{g_{ab}h^a_\mu h^b_\nu\}$ and $V^\mu = \gamma^\mu_{cc} - \gamma^{c\mu}_{c\cdot}$. Function

$$L_\gamma = \delta^{\mu\nu}_{ab} g^{bd} \gamma^a_{\mu c} \gamma^c_{\nu d}$$

plays the role of Lagrangian in the theory of gravity in the affine frame (TGAF).

Let's consider T^g-transformations:

$$\delta x^\mu = h^\mu_a t^a,$$
$$\delta h^b_\mu = -F^b_{\mu a} t^a - \partial_\mu t^a,$$
$$\delta g_{bc} = -g_{bc,a} t^a$$

with infinitesimal parameters t^a. Lagrangian L_γ is invariant under this transformations, so take place the strong Noether's identity

$$t^\mu_a + \nabla_\sigma B^{\mu\sigma}_a = -G^\mu_a,$$

where

$$t^\mu_a = B^{\sigma\mu}_b F^b_{\sigma a} + D^{bc\mu}\gamma^{\cdot}_{bac} - L_\gamma h^\mu_a$$

is the energy-momentum tensor of the gravitational field in TGAR,

$$B^{\mu\sigma}_a = \delta^{\mu\sigma}_{\rho\nu}(\gamma^{\rho\nu}_{a\cdot} + h^\rho_a V^\nu),$$
$$D^{bc\mu} = -(\gamma^{\mu bc} + \gamma^{\mu cb}) + h^\mu_d(g^{db}\gamma^{ac}_a + g^{dc}\gamma^{ab}_a) + g^{bc}V^\mu$$

and G^μ_a - Einstein tensor. On the gravitational extremal $G^\mu_a = \tau^\mu_a$, where τ^μ_a - energy-momentum tensor of matter fields, we obtain the equation for gravitation field in TGAR:

$$\partial_\sigma(eB^{\mu\sigma}_a) = -eT^\mu_a,$$

where $T^\mu_a = t^\mu_a + \tau^\mu_a$ is the complete energy-momentum tensor of the gravitational and matter fields, and $eB^{\mu\sigma}_a$ plays the role of its superpotential. This equation has the form of Maxwell equations and equations of gauge theory of gravity in the orthonormal frame [1].

Rerefences

[1] S. E. Samokhvalov, V. S. Vanyashin. Group theory approach to unification of gravity with internal symmetry gauge interactions. *Class. Quantum Grav.*, 8 : 2277–2282, 1991.

Integrable systems with dissipation on the tangent bundle of two-dimensional manifold

Maxim V. Shamolin
(Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1 Michurinskii Ave., 119192 Moscow, Russian Federation)
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

We study nonconservative systems for which the usual methods of the study, e.g., Hamiltonian systems, are inapplicable. Thus, for such systems, we must "directly" integrate the main equation of dynamics. We generalize previously known cases and obtain new cases of the complete integrability in transcendental functions of the equation of dynamics of a four-dimensional rigid body in a nonconservative force field.

We obtain a series of complete integrable nonconservative dynamical systems with nontrivial symmetries. Moreover, in almost all cases, all first integrals are expressed through finite combinations of elementary functions; these first integrals are transcendental functions of their variables. In this case, the transcendence is understood in the sense of complex analysis, when the analytic continuation of a function into the complex plane has essentially singular points. This fact is caused by the existence of attracting and repelling limit sets in the system (for example, attracting and repelling focuses).

We detect new integrable cases of the motion of a rigid body, including the classical problem of the motion of a multi-dimensional spherical pendulum in a flowing medium.

This activity is devoted to general aspects of the integrability of dynamical systems with variable dissipation. First, we propose a descriptive characteristic of such systems. The term "variable dissipation" refers to the possibility of alternation of its sign rather than to the value of the dissipation coefficient (therefore, it is more reasonable to use the term "sign-alternating") [1, 2].

We introduce a class of autonomous dynamical systems with one periodic phase coordinate possessing certain symmetries that are typical for pendulum-type systems. We show that this class of systems can be naturally embedded in the class of systems with variable dissipation with zero mean, i.e., on the average for the period with respect to the periodic coordinate, the dissipation in the system is equal to zero, although in various domains of the phase space, either energy pumping or dissipation can occur, but they balance to each other in a certain sense. We present some examples of pendulum-type systems on lower-dimension manifolds from dynamics of a rigid body in a nonconservative field.

Then we study certain general conditions of the integrability in elementary functions for systems on the two-dimensional plane and the tangent bundles of a one-dimensional sphere (i.e., the two-dimensional cylinder) and a two-dimensional sphere (a four-dimensional manifold). Therefore, we propose an interesting example of a three-dimensional phase portrait of a pendulum-like system which describes the motion of a spherical pendulum in a flowing medium (see also [3, 4]).

To understand the difficulty of problem resolved, for instance, let us consider the spherical pendulum (ψ and θ — the coordinates of point on the sphere where the pendulum is defined) in a jet flow. Then the equations of its motion are

$$\ddot{\theta} + (b_* - H_1^*)\dot{\theta}\cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \dot{\psi}^2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{\psi} + (b_* - H_1^*)\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} = 0,\ b_* > 0,\ H_1^* > 0, \tag{2}$$

and the phase pattern of the eqs. (1), (2) is on the Fig. 0.1.

The assertions obtained in the work for variable dissipation system are a continuation of the Poincare–Bendixon theory for systems on closed two-dimensional manifolds and the topological classification of such systems.

The problems considered in the work stimulate the development of qualitative tools of studying, and, therefore, in a natural way, there arises a qualitative variable dissipation system theory.

Following Poincare, we improve some qualitative methods for finding key trajectories, i.e., the trajectories such that the global qualitative location of all other trajectories depends on the location and the

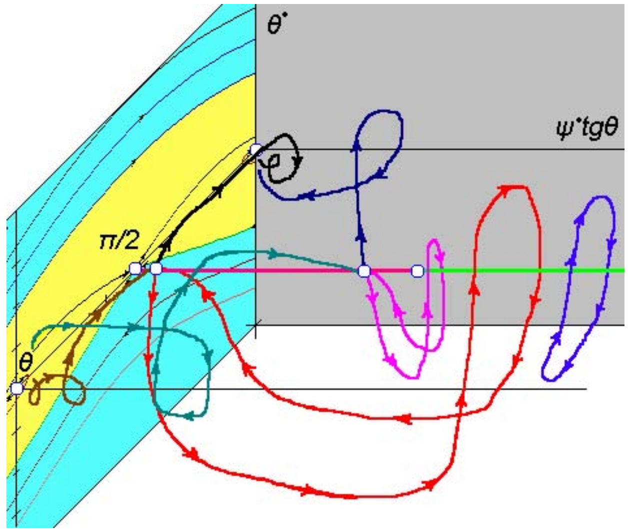


FIGURE 0.1. Phase pattern of spherical pendulum in a jet flow.

topological type of these trajectories. Therefore, we can naturally pass to a complete qualitative study of the dynamical system considered in the whole phase space. We also obtain condition for existence of the bifurcation birth stable and unstable limit cycles for the systems describing the body motion in a resisting medium under the streamline flow around. We find methods for finding any closed trajectories in the phase spaces of such systems and also present criteria for the absence of any such trajectories. We extend the Poincare topographical plane system theory and the comparison system theory to the spatial case. We study some elements of the theory of monotone vector fields on orientable surfaces.

Rerefences

[1] M. V. Shamolin. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body. *Journal of Mathematical Sciences*, 122(1) : 2841–2915, 2004.

[2] M. V. Shamolin. *Methods for Analysis of Variable Dissipation Dynamical Systems in Rigid Body Dynamics*. Moscow : Ekzamen, 2007.

[3] M. V. Shamolin. Dynamical systems with variable dissipation: approaches, methods, and applications. *Journal of Mathematical Sciences*, 162(6) : 741–908, 2009.

[4] M. V. Shamolin. New Cases of Integrability of Equations of Motion of a Rigid Body in the n-Dimensional Space. *Journal of Mathematical Sciences*, 221(2) : 205–259, 2017.

On geometry of spatial kinematics in Lorentzian space

Tunahan Turhan
(Süleyman Demirel University, Vocational School of Technical Sciences, 32260, Isparta)
E-mail: tunahanturhan@sdu.edu.tr

Nihat Ayyildiz
(Süleyman Demirel University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, 32260, Isparta)
E-mail: nihatayyildiz@sdu.edu.tr

In this work, we give geometric properties of mappings of spatial kinematics in Lorentzian space with the aid of dual number and split quaternion. Moreover, we get orthogonal rotation matrix A with respect to the Lorentzian Rodrigues parameters and the Lorentzian Euler parameters in such a space. Also, the mapping of spatial kinematics into points of a dual Lorentzian projective space are defined.

Rerefences

[1] Barrett O'Neill. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. *Academic Press, London*, 1983.
[2] Bahram Ravani and Bernard Roth. *Mappings of Spatial Kinematics Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in Design*. 106: 341-347, 1984.
[3] Eduard Study. Die Geometrie der Dynamen. *Leipzig*, 1903.
[4] Hellmuth Stachel. *Instantaneous Spatial Kinematics and the Invariants of the Axodes Proceedings Ball 2000 Symposium, Cambridge University Press, London*. 23:, 14 pages, 2000.
[5] J. Michael McCarthy. *The Instantaneous Kinematics of Line Trajectories in Terms of a Kinematic Mapping of Spatial Rigid Motion ASME Journal of Mechanism, Transmissions and Automation*. 109: 98-100, 1987.
[6] J. Michael McCarthy and Bahram Ravani. *Differential Kinematics of Spherical and Spatial Motions Using Kinematic Mapping Journal of Applied Mechanics*. 53: 15-22, 1986.
[7] Levent Kula and Yusuf Yaylı. *Split Quaternions and Rotations in Semi-Euclidean Space E_2^4, Journal of the Korean Mathematical Society*. 6: 1313-1327, 2007.
[8] Oene Bottema and Bernard Roth. Theoretical Kinematics. *Dover Publications, New York*, 1990.
[9] Osman Keçilioğlu, Sıdıka Ozkaldıand Halit Gündoğan. *Rotations and Screw Motion with Timelike Vector in 3-Dimensional Lorentzian Space, Advances in Applied Clifford Algebras*. 22: 1081-1091, 2012.
[10] Sıdıka Ozkaldıand Halit Gündoğan. *Cayley Formula, Euler Parameters and Rotations in 3-Dimensional Lorentzian Space, Advances in Applied Clifford Algebras*. 20: 367-377, 2010.

A study on the integral invariants of a closed spacelike ruled surface

Tunahan Turhan
(Süleyman Demirel University, Vocational School of Technical Sciences, 32260, Isparta)
E-mail: tunahanturhan@sdu.edu.tr

Nihat Ayyildiz
(Süleyman Demirel University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, 32260, Isparta)
E-mail: nihatayyildiz@sdu.edu.tr

In the present work, we study integral invariants of a closed spacelike ruled surface with respect to the integral invariants of the closed dual spacelike spherical curve. Moreover, by using the concepts and results on spherical spacelike curve in dual Lorentzian space, we give some relations about the pitch and the angle pitch of a closed spacelike ruled surface.

Rerefences

[1] Ayşe Altın and Aysel Turgut Vanli. *The pitch and the pitch of a closed nonnull ruled hypersurface whose generator is spacelike in* R_1^{k+2}, Turkish Journal of Mathematics, 24: 327-334, 2000.
[2] Barrett O'Neill. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. *Academic Press, London*, 1983.
[3] Emin Özyilmaz and Yusuf Yayli. *On the closed spacelike developable ruled surface. Hadronic Journal.* 23: 439-456, 2000.
[4] Emin Özyilmaz and Yusuf Yayli. *On the integral invariants of a timelike ruled surface. Mathematical Computational Applications.* 6: 137-145, 2001.
[5] Hasan Hilmi Hacisalihoglu. *On the pitch of a closed ruled surface. Mechanism and Machine Theory.* 7: 291-305, 1972.
[6] Nihat Ayyildız, *The integral invariants of a closed ruled surface in semi-Euclidean space.* PhD thesis, Süleyman Demirel University, The Institute of Science, Isparta, 2003.
[7] Osman Gürsoy. *The dual angle of pitch of a closed ruled surface. Mechanism and Machine Theory.* 25: 131-140, 1990.
[8] Osman Gürsoy. *On the integral invariants of a closed ruled surface. Journal of Geometry.* 39: 80-91, 1990.
[9] Ömer Köse. *Contributions to the theory of integral invariants of a closed ruled surface. Mechanism and Machine Theory.* 32: 261-277, 1997.

Dual modules over Steenrod algebra 2

Alexander N. Vasilchenko
(19 Cheluskintsev, a.32, Samara)
E-mail: vass-alexandr@yandex.ru

Article [3] studies structures of modules over Steenrod algebra A and their duals in dual Steenrod algebra A^* [2], [4]. [1] studies modules $A(n)$ over A generated by annihilators of cohomology classes with degrees no greater then n. $A(n)^+$ is defined as annihilators of cohomology operations with excess greater then n [6]. In A^*, $A(n)^*$ is the corresponding dual module of $A(n)$. $A(n)^+$ as vector space over Z_p is generated by all monomials of A^* with multiplicity no greater then n [5], [6].

This work studies structure of modules $B(n) = (A(n-1)/A(n))^*$. $B(n)$ as a Z_p vector space has a basis formed by all monomials with multiplicity n in dual Steenrod algebra A^* [6], and $B(n)$ can be considered both left and right over A^*.

The result is stated here:

Theorem 1 (**Properties of quotient** A^***-modules** $(A(n-1)/A(n))^*$**).** 1) *$B(n)$ is a graded Hopf comodule over Steenrod algebra A^* with comultiplication*

$$\phi_n^* : B(n) \to A^* \bigotimes B(n), \qquad \phi_n^*([\alpha]) = \sum_i \alpha_i' \bigotimes [\alpha_i'']$$

induced by comultiplication in comodule $A(n)^+$, with homomorphism property

$$\begin{aligned}\phi_n^*([\alpha] * [\beta]) &= \phi_n^*([\alpha\beta]) \\ &= (\psi^* \otimes \psi_n^*)(Id_{A^*} \otimes T \otimes Id_{B(n_2)})(\phi_{n_1}^*([\alpha]) \otimes \phi_{n_2}^*([\beta])) \\ &\stackrel{def}{=} \phi_{n_1}^*([\alpha]) * \phi_{n_2}^*([\beta])\end{aligned}$$

where $\psi_{n_1+n_2}^* : B(n_1) \bigotimes B(n_2) \to B(n_1+n_2)$ is a multiplication defined by

$$\psi_{n_1+n_2}^*([\alpha] \otimes [\beta]) = [\psi^*(\alpha \otimes \beta)] = [\alpha\beta] = [\alpha] * [\beta]$$

induced by multiplication ψ^* in A^*, T is a transposition, $[\alpha]$ in $B(n_1)$, and $[\beta]$ in $B(n_2)$.

2) *$B(n) = \bigoplus_s B(n)^s$ is the direct sum of Hopf comodules*

$$B(n)^s = Span\{\tau_0^{s_0}\tau_1^{s_1}\tau_2^{s_2}\ldots\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\xi_3^{r_3}\ldots \in A^* | \sum_i s_i = s\}$$

3) *$B(n)_t = \bigoplus_s B(n)_t^s$ is the direct sum of comodules $B(n)_t = (A(n)^+ \cap A_t^*)/(A(n-1)^+ \cap A_t^*)$ defined on the filtration of dual Steenrod algebra A^* by Hopf subalgebras*

$$A_{-1}^* \subset A_0^* \subset A_1^* \subset \ldots \subset A_n^* \subset A_{n+1}^* \subset \ldots A^*,$$

where $A_t^* = Z_p\{\xi_1, \xi_2, \ldots\} \bigotimes E\{\tau_0, \tau_1 \ldots \tau_t\}$ and $A_{-1}^* = Z_p\{\xi_1, \xi_2 \ldots\}$. The restrictions of the comultiplication and multiplication (1) on the filtration are well defined maps:

$$\phi_{n,t}^* : B(n)_t \to A^* \otimes B(n)_t, \qquad \textit{and} \qquad \psi_{n_1 n_2,t}^* : B(n_1)_t \otimes B(n_2)_t \to B(n_1+n_2)_t.$$

4) *Any $[\alpha]$ in $B(n)_t$ has unique form $[\alpha] = [\beta] + [\gamma] * [\tau_t]$ where $[\beta] \in B(n)_{t-1}$ and $[\gamma] \in B(n-1)_{t-1}$, and there are homomorphisms of comodules $i_{n,t}$ and $\pi_{n,t}$ such that $i_{n,t}([\beta]) = [\beta]$, and $\pi_{n,t}([\alpha]) = [\gamma]$, and the following diagram with exact rows commutes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B(n)_{t-1} \arrow[r, tail, "i_{n,t}"] \arrow[d, "\phi^*_{n,t-1}"'] & B(n)_t \arrow[r, "\pi_{n,t}"] \arrow[d, "\phi^*_{n,t}"'] & B(n-1)_{t-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi^*_{n-1,t-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^* \otimes B(n)_{t-1} \arrow[r, tail, "Id\otimes i_{n,t}"] & A^* \otimes B(n)_t \arrow[r, "Id\otimes\pi_{n,t}"] & A^* \otimes B(n-1)_{t-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Rerefences

[1] H. Cartan. Algebres d'Eilenberg-MacLane at Homotopie. *Seminare Cartan ENS*, 7e, 1954–1955.

[2] J. Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Annals of Mathematics*, 67 : 150–171, 1958.

[3] J. Milnor, J. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Annals of Mathematics*, 81 : 211–264, 1965.

[4] N. Steenrod, D. B. A. Epstein. *Cohomological Operations*, Princeton University Press, 1962.

[5] A. H. Васильченко. Свойства дуальных модулей над алгеброй Стинрода. Abstracts of the International Conference "Gemetry in Odessa" – 2014, Odessa the 26th of May – the 31st of May 2014: p.26

[6] A. H. Васильченко. Свойство дуальных модулей над алгеброй Стинрода. *Вестник СамГУ* 7(118) : 9–16, 2014.

Topology of the basin of attraction of surface endomorphisms.

Vlasenko I.
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev)
E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Let $f : M \to M$ be a branched covering, i.e. an inner (open and isolated) map of a surface M. A map is open if the image of an open set is open. A map is isolated if the pre-image of a point consists of isolated points.

Let (A, R) be a (topological) attractor-repeller pair. There is the continuum of different attractor-repeller pairs with the same basin of attraction. The question is: is there the smallest attractor for the given basin of attraction? If it exists, what are its topological properties?

Rerefences

[1] И. Ю. Власенко *Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения*, - Институт математики НАН Украины. Киев. – 2014.

About some properties of functions determined as transformations from W^n to W^m-representation

Victoria Voloshyna
(National pedagogical university)
E-mail: wictorria@gmail.com

In this short article we describe the main properties of W^n-representation of points of unit hypercube. Our main goal is to show main properties of functions determined as transformations from W^n-representation of unit square to W^m-representation of points from unit interval [1].

1. Algorithm for construction of W^n-representation

At the beginning we have the unit n-dimensional hypercube $I^n = [0,1]^n$. W^n-representation of I^n can be received using next steps.

1) Let us divide the I^n into r parts which are closed in R^n and their interiors don't intersect. Lebesgue measures of new sets $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_{r-1}$ are $q_0, q_1, ..., q_{r-1}$ respectively.

2) Each set Δ_i is divided analogically into parts $\Delta_{i0}, ..., \Delta_{i[r-1]}$. The proportion of participles' Lebesgue measures remains invariant. After the second stage process continues and each set $\Delta_{\alpha_1...\alpha_k}$ is divided using the same rule.

If $k \to \infty$ then the Lebesgue measure of $\Delta_{\alpha_1...\alpha_k}$ must converge to zero.

2. Functions of transformation

Let us to define function of transformation W^n to W^m-representation.

Definition 1. Function of transformation from W^n to W^m-representation is a functional mapping which gives for each $x = \Delta^{W^n}_{\alpha_1...\alpha_k...}$ a unique $y = \Delta^{W^m}_{y(\alpha_1)...y(\alpha_k)...}$.

Remark 2. For uniqueness of such mapping we will consider to choose only the representation of $x \in E^n$ in which vector $(\alpha_1, ..., \alpha_k, ...)$ is minimal.

Definition 3. Function of transformation from W^n- to Q-representation is a functional mapping which gives for each $x = \Delta^{W^n}_{\alpha_1...\alpha_k...}$ a unique $y = \Delta^{Q}_{y(\alpha_1)...y(\alpha_k)...}$.

We received new results for the graphs of functions of transformation from W^n- to Q-representation.

Definition 4. Simple n-cube W^n-representation of I^n is W^n-representation which consists only of n-cubes with equal Lebesgue n-dimensional measure on each step (we enumerate particles from left higher corner and preserve orientation of numeration on next steps).

Theorem 5. *The graph of function of transformation from simple n-cube W^n-representation to s-adic number representation* [2] *is a fractal set with dimension $log(4)/log(4^n) = 1/n$*

Theorem 6. *The graph of function of transformation from simple quadrate W^n-representation to s-adic number representation is nowhere connected set.*

Definition 7. Connected n-cube W^n-representations of I^n is a class of W^n-representations such that:

1) W^n-representation consists only of figures with equal Lebesgue n-dimensional measure on each step (we enumerate particles from left higher corner and preserve orientation of numeration on next steps).

2) At least one point of I^n has continuum quantity of W^n-representations in this system.

Theorem 8. *The graph of function of transformation from connected n-cube W^n-representation to s-adic number representation is nowhere connected set.*

Our next goal is to receive new information about properties of functions of transformation from W^n- to W^m-representation and to formulate general theorems for their classification.

Rerefences

[1] Voloshyna V. *Properties and applications of W^n-representation of points from unit hypercube.* (in addition, TIMS, 2016)

[2] Pratsiovytyi M. V. *Fractal approach to researching of singular distributions*. National pedagogical university named after M. P. Dragomanov, Kyiv, 1998, 296 p.

On the problem of product of inner radii symmetric non-overlapping domains

Vyhivska Liudmyla
(Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine)
E-mail: liudmylavygivska@ukr.net

Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ be the sets of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be the complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be its one-point compactification. Let $r(D,a)$ be the inner radius of the domain $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to a point $a \in D$. The inner radius is a generalization of the conformal radius for multiply connected domains. The inner radius of the domain D is associated with the generalized Green function $g_D(z,a)$ of the domain D by the relations

$$g_D(z,a) = \ln\frac{1}{|z-a|} + \ln r(D,a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_D(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(D,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

The system of non-overlapping domains is called a finite set of arbitrary domains $\{D_k\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ such that $D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $D_k \cap D_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k,m = \overline{0,n}$.

Denote by $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 2$.

Theorem 1. *For any $\gamma > 1$ there exists $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, such that for any $n \geqslant n_0(\gamma)$, and system of points $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$, and system of pairwise non-overlapping domains $\{D_k\}_{k=0}^{n}$, $0 \in D_0$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, such that domains $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ are symmetric with respect to a unit circle, the following inequality holds*

$$r^{\gamma}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,a_k) \leqslant r^{\gamma}\left(D_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)},a_k^{(0)}\right).$$

The equality is attained if $a_k = a_k^{(0)}$ and $D_k = D_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, where $a_k^{(0)}$ and $D_k^{(0)}$ are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Rerefences

[1] Vladimir Dubinin. Symmetrization method in geometric function theory of complex variables. *Successes Mat. Science* 49(1): 3–76, 1994.

[2] Leonid Kovalev. On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 6: 80–81, 2000.

[3] Leonid Kovalev. On three disjoint domains. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 1: 3–7, 2000.

[4] Alexander Bakhtin, Galina Bakhtina, Yuriy Zelinskii. Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 308 pp., 2008. (in Russian)

A Study on Rectifying Curves in Semi-Euclidean Spaces

Selen Yildirim
(Süleyman Demirel University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, 32260, Isparta)
E-mail: selenyildirim12@hotmail.com

Nihat Ayyildiz
(Süleyman Demirel University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, 32260, Isparta)
E-mail: nihatayyildiz@sdu.edu.tr

In this work, we get a characterizaiton of rectifying curves in semi-Euclidean spaces. Considering the structure of the rectifying curves, we give some generalizations of such curves and characterize some properties of these curves in terms of their curvature functions.

Rerefences

[1] Ahmad Tawfiq Ali and Mehmet Önder. Some characterizations of space-like rectifying curves in the Minkowski space-time. *Global Journal Science Front Result Mathematics Decision Science.* 12: 57-64, 2012.
[2] Barrett O'Neill. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. *Academic Press, London*, 1983.
[3] Bang Yen Chen. *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?. The American Mathematical Monthly.* 110: 147-152, 2003.
[4] Bang Yen Chen and Franki Dillen. *Rectifying curves as centrodes and extremal curves. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica.* 33: 77-90, 2005.
[5] Kazım İlarslan and Emilija Nesovic. *Some characterizations of null, pseudo null and partially null rectifying curves in Minkowski space-time. Taiwanese Journal of Mathematics.* 12: 1035-1044, 2008.
[6] Kazım İlarslan and Emilija Nesovic. *Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E^4. Turkish Journal of Mathematics.* 32: 21-30, 2008.
[7] Kazım İlarslan, Emilija Nesovic and Miroslava Petrovic-Torgasev. *Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3- space. Novi Sad Journal of Mathematics.* 33: 23-32, 2003.
[8] Stijn Cambie, Wendy Goemans and Iris Van Den Bussche. *Rectifying curves in n-dimensional Euclidean space. Turkish Journal of Mathematics.* 40: 210-223, 2016.
[9] Tunahan Turhan. *On Rectifying Curves and Their Characterizations in Lorentz n-Space.* Preprint. 2016.

Эрмитова геометрия почти контактного метрического многообразия

О. Е. Арсеньева
(Московский педагогический государственный университет, ул. Малая Пироговская 1, Москва, 119882, Россия)
E-mail: highgeom@yandex.ru

В. Ф. Кириченко
(Московский педагогический государственный университет, ул. Малая Пироговская 1, Москва, 119882, Россия)
E-mail: highgeom@yandex.ru

Е. В. Суровцева
(Московский педагогический государственный университет, ул. Малая Пироговская 1, Москва, 119882, Россия)
E-mail: surovtseva_elena@inbox.ru

Пусть M^{2n+1} — гладкое многообразие. Почти контактной метрической структурой (короче, AC-структурой) на M называется четверка (η, ξ, Φ, g), где η -дифференциальная 1-форма, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\mathfrak{X}(M)$, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на M и выполняются следующие условия:

1) $\eta(\xi) = 1$; 2) $\eta \circ \Phi = 0$; 3) $\Phi(\xi) = 0$; 4) $\Phi^2 = -\mathrm{id} + \eta \otimes \xi$

5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y); X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Многообразие с фиксированной на нем почти контактной метрической структурой называется почти контактным метрическим многообразием.

Доказана основная

Теорема 1. *Контактное распределение почти контактного метрического многообразия вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда справедливо следующее соотношение:*

$$\nabla_{\Phi(Y)}(\Phi)\Phi(X) = \nabla_{\Phi(X)}(\Phi)\Phi(Y).$$

Пусть M — почти контактное метрическое многообразие с вполне интегрируемым первым фундаментальным распределением $\mathfrak{L}$, $N \subset M$ — интегральное многообразие максимальной размерности первого фундаментального распределения многообразия M. Тогда на нем канонически индуцируется почти эрмитова структура $\langle J, \widetilde{g} \rangle$, где $J = \Phi|_{\mathfrak{L}}$,

Имея в виду классификацию Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур, можем выявить связь между классом почти контактных метрических структур на многообразии M и соответствующим ему классом почти эрмитовых структур на многообразии N. Применим ее для исследования конкретных структур.

Структурой Кенмоцу называется почти контактная метрическая структура, для которой выполняется тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle - \eta(Y)\Phi X \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 2. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения многообразия Кенмоцу, является келеровой структурой.*

AC-структура называется нормальной, если тензор Нейенхейса N_Φ ее структурного эндоморфизма удовлетворяет тождеству

$$N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

Теорема 3. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности вполне интегрируемого первого фундаментального распределения нормального многообразия, является эрмитовой структурой.*

Почти контактная метрическая структура называется слабо-косимплектической, если

$$\nabla_X(\Phi)X = 0, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

В случае, если $\nabla_X(\Phi)Y = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, структура называется косимплектической.

Теорема 4. *Пусть — слабо-косимплектическое многообразие, тогда его первое фундаментальное распределение инволютивно тогда и только тогда, когда — точнейше косимплектическое многообразие.*

Теорема 5. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности вполне интегрируемого первого фундаментального распределения слабо косимплектического многообразия является приближенно келеровой структурой.*

Литература

[1] Кириченко В.Ф., *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Одесса: "Печатный Дом"2013 г. 458 с.

[2] Кириченко В.Ф., *О геометрии многообразий Кенмоцу* // Доклады академии наук, М., т.380 (5), 2001, 585–587.

[3] Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р., *Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий* // Математический сборник, т.8 (193), М., 2002, 1173-1201.

[4] Кириченко В.Ф., Баклашова Н.С., *Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты* // Математические заметки, 2007, т.82 (3), 347-360.

Структура множества субмерсий, для которых все поверхности уровня являются линейно связными

А. М. Байтураев
(Ташкент, Национальный университет Узбекистана)
E-mail: abayturaev@mail.ru

Если на гладком многообразии задана дифференцируемая функция без критических точек, то компоненты связности поверхностей уровня порождают слоение коразмерности один. Если же все поверхности уровня рассматриваемой функции линейно связны, то сами поверхности уровня порождают гладкое слоение коразмерности один.

В этом работе рассматривается вопрос о том, насколько богато множество дифференцируемых функций без критических точек, все поверхности уровня которых линейно связны. Получено результат, что множество дифференцируемых функций без критических точек, для которых все множества уровней линейно связны, является замкнутым множеством в пространстве всех дифференцируемых функций.

Пусть $C^1(R^n, R^1)$ - множество всех дифференцируемых функций класса C^1. На множестве $C^1(R^n, R^1)$ введем слабую (C^1 - компактно-открытую) топологию.

Множество всех C^r-гладких отображений $f : M \to N$ обозначим через $C^r(M, N)$, где M, N - гладкие многообразия класса C^r. Предположим, что $r = 0, 1, 2, ...$

Слабая топология (C^r-компактно-открытая топология) в $C^r(M, N)$ порождается множествами, определяемыми следующим образом.

Пусть $f \in C^r(M, N)$ и пусть (φ, U), (ψ, V) - карты многообразий M, N. Пусть, далее, $K \subset U$ - компактное множество, такое, что $f(K) \subset V$; пусть, $0 < \varepsilon < \infty$.

Предбазисную окрестность

$$\aleph^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon) \ (1)$$

слабой топологии определяется как множество таких C^r-отображений $g : M \to N$, что $g(K) \subset V$ и для любых $x \in \varphi(K)$, $k = 0, ..., r$,

$$\|D^k(\psi f \varphi^{-1})(x)\text{-}D^k(\psi g \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon.$$

Это означает, что локальные представления отображений f, g вместе с их первыми r производными различаются не более, чем на ε в каждой точке компактного множества K.

Слабая топология в $C^r(M, N)$ порождается множествами (1); этим определяется топологическое пространство $C^r_W(M, N)$. Окрестностью точки f по отношению к этой топологии является, таким образом, всякое множество, содержащее пересечение конечного числа множеств типа (1).

В данной работе качестве многообразия N мы рассматриваем одномерное многообразие R^1 и полагаем, что $r = 1$. Пространство $C^1(R^n, R^1)$ рассматривается со слабой топологией (C^r-компактно-открытой топологией). Известно, что пространство $C^r(M, N)$ со слабой топологией имеет счетную базу.

Обозначим через $LS(R^n, R^1)$ множество субмерсий, для которых все поверхности уровня линейно связно.

Теорема 1. *Множество $LS(R^n, R^1)$ является замкнутым подмножеством пространства $C^1(R^n, R^1)$ всех дифференцируемых функций класса C^1.*

Литература

[1] Нарманов А., Байтураев А. Об одном классе субмерсий. //Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2003. – №2. –С. 29-36.
[2] Хирш М. Дифференциальная топология. –Москва, «Мир», 1979 г.

К вопросу о конформных отображениях римановых пространств на Риччи симметрические римановы пространства

В. Е. Березовский
(Уманьский национальный университет садоводства, ул.Институтская, д. 1, г.Умань, Черкасская обл., 20305, Украина)
E-mail: berez.volod@rambler.ru

Й. Микеш
(университет им.Палацкого, ул. 17 Листопада, д. 12, г. Оломоуц, 77147, Чешская республика)
E-mail: josef.mikes@upol.cz

И. Гинтерлейтнер
(Brno University of Technology, Brno, Czech Republic)
E-mail: Hinterleitner.I@fce.vutbr.cz

Конформные отображения римановых пространств рассматривались во многих работах. Примечательно, что эти отображения имеют приложения в общей теории относительности.

Напомним основные понятия теории конформных отображений, изложенные в [1,2,3].

Рассмотрим отображение f риманова пространства V_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x)$.

Отображение $f\colon V_n \to \bar{V}_n$ называют *конформным*, если в общей по отображению системе координат $x = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ между метрическими тензорами $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x)$ пространств V_n и $\bar{V}_n$ имеет место зависимость

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\psi(x)} \cdot g_{ij}(x), \qquad (1)$$

где $\psi(x)$ — некоторый инвариант.

Из (1) следует, что при конформных отображениях углы между касательными векторами сохраняются, а длины соответствующих векторов пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности зависит только от точки. Этими геометрическими свойствами конформные отображения одного риманова пространства V_n на другое риманово пространство $\bar{V}_n$ характеризуются полностью.

Из (1) следует, что между символами Кристоффеля второго рода пространств V_n и $\bar{V}_n$ имеется зависимость

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i - \psi^h(x)\,g_{ij}(x),$$

где $\psi_i(x) = \partial\psi/\partial x^i$, $\psi^h = g^{h\alpha}\psi_\alpha$, g^{ij} — компоненты обратной матрицы к матрице $\|g_{ij}\|$, δ^h_i — символы Кронекера.

Вопрос о том, допускает или не допускает риманово пространство V_n $(n > 2)$ конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна $\bar{V}_n$ был сведен Г. Бринкманом [4] к проблеме существования решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Коши относительно $(n+1)$ неизвестных функций.

Основные уравнения указанных отображений сведены к линейной системе дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши, при помощи которой удалось оценить степень мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна (см. [5,6]).

Напомним, что пространство аффинной связности называют *Риччи симметрическим*, если тензор Риччи в нем абсолютно параллелен.

Рассмотрим конформное отображения римановых пространств V_n на Риччи-симметрические римановы пространства $\bar{V}_n$, которые характеризуются условиями на тензор Риччи

$$\bar{R}_{ij|k} = 0$$

где “$|$” — ковариантное дифференцирование в $\bar{V}_n$.

Нами доказана

Теорема. *Для того, чтобы риманово пространство* V_n *допускало конформное отображение на Риччи-симметрическое пространство* $\bar{V}_n$, *необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение замкнутой смешанной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно функций* $\psi_i(x)$, $\mu(x)$ *и* $\bar{R}_{ij}(x)$ $(= \bar{R}_{ji}(x))$:

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j} &= \psi_i\psi_j - \frac{\mu}{n-2}\cdot g_{ij} + \frac{1}{n-2}\,(\bar{R}_{ij} - R_{ij}),\\
\mu_{,j} &= g^{\alpha\beta}\,\Big((n-2)\,R^{\gamma}_{\beta j\alpha}\psi_\gamma + (n-1)\,\psi_\alpha\bar{R}_{\beta j} - R_{\alpha j}\psi_\beta\Big) +\\
&\quad (n-1+g^{\alpha\beta}\,R_{\alpha\beta})\,\psi_j,\\
\bar{R}_{ij,k} &= \psi_i\bar{R}_{jk} + \psi_j\bar{R}_{ik} + 2\,\psi_k\bar{R}_{ij} - g^{\alpha\beta}\,\psi_\beta\,(g_{ik}\bar{R}_{\alpha j} + g_{jk}\bar{R}_{\alpha i}).
\end{aligned}$$

Очевидно, общее решение замкнутой смешанной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных зависит не более чем от $1/2\,(n+2)\,(n+1)$ существенных параметров.

Литература

[1] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия.* Ин. лит., М. (1948).

[2] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств.* Наука, М. (2008), 256с.

[3] J. Mikeš et al, *Differential geometry of special mappings.* Palacky Univ. Press, Olomouc (2015), 569p.

[4] H. W. Brinkmann, *Einstein spaces which mapped conformally on each other*. Math. Ann., 1925, № 94, 117–145.

[5] Й. Микеш, М. Л. Гаврильченко, Е. И. Гладышева, *О конформных отображениях на пространства Эйнштейна.* Вестник Моск. ун-та, 1994, № 3, 13–17.

[6] Л. Е. Евтушик, И. Гинтерлеитнер, Н. И. Гусева, Й. Микеш, *Конформные отображения на пространства Эйнштейна.* Изв. вузов. Матем., 2016, № 10, 8–13.

К вопросу о канонических почти геодезических отображениях первого типа

В. Е. Березовский
(Уманьский национальный университет садоводства, ул.Институтская, д. 1, г.Умань, Черкасская обл., 20305, Украина)
E-mail: berez.volod@rambler.ru

Й. Микеш
(университет им.Палацкого, ул. 17 Листопада, д. 12, г. Оломоуц, 77147, Чешская республика)
E-mail: josef.mikes@upol.cz

Е. В. Черевко
(Одесский национальный экономический университет, ул.Преображенская, д. 8, г.Одесса, 65082, Украина)
E-mail: cherevko@usa.com

Пусть при отображении $\pi : A_n \to \overline{A}_n$ тензор деформации связностей P^h_{ij} удовлетворяет уравнению

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k} + \delta^h_{(k} a_{ij)}, \tag{1}$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор, скобки обозначают симметрирование по указанным индексам без деления.

Легко убедиться, что отображение $\pi : A_n \to \overline{A}_n$, определяемое уравнением (1) является частным случаем почти геодезических отображений первого типа [1, 2]

Имеют место

Теорема 1. *Тензор Римана R^h_{ijk} является инвариантным относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнением (1), геометрическим объектом пространств аффинной связности.*

Теорема 2. *Если аффинное пространство A_n допускает почти геодезическое отображение, определяемых уравнением (1), на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$, то пространство $\overline{A}_n$ является аффинным пространством.*

Таким образом, аффинные пространства образуют замкнутый класс относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнением (1).

Рассматривая (1) как систему уравнений типа Коши относительно тензора деформации P^h_{ij}, из условий ее интегрируемости получим

$$\begin{aligned} a_{ik,j} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}\big[n\big(P^\alpha_{ik} R_{\alpha j} - P^\beta_{\alpha(k} R^\alpha_{i)j\beta}\big) + R_{\alpha(k} P^\alpha_{i)j} - P^\beta_{\alpha j} R^\alpha_{(ik)\beta} - \\ - P^\beta_{\alpha(i} R^\alpha_{|j|k)\beta} + (n+1)\big(a_{j(i} P^\alpha_{k)\alpha} - a_{\alpha(i} P^\alpha_{k)j\alpha}\big) + 2\big(a_{ik} P^\alpha_{j\alpha} - a_{j\alpha} P^\alpha_{ik}\big)\big], \end{aligned} \tag{2}$$

где R^h_{ijk} и R_{ij} – соответственно, тензоры Римана и Риччи пространства A_n.

Очевидно, должны еще выполняться условия алгебраического характера

$$P^h_{ij} = P^h_{ji}, \qquad a_{ij} = a_{ji}. \tag{3}$$

Поэтому, имеет место теорема.

Теорема 3. *Для того, чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемых уравнением (1), на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной замкнутой системы типа Коши (1), (2) (3) относительно функций P^h_{ij} и a_{ij}.*

Литература

[1] Н. С. Синюков. *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, М., 1979.
[2] J. Mikeš, et al. *Differential geometry of special mappings*, Palacky Univ. Press, Olomouc, 2015.

О мультимасштабных элементах перколяционного кластера

Герега А.Н.
(ОНАПТ, Одесса, Украина)
E-mail: aherega@gmail.com

Крывченко Ю.В.
(ОНАПТ, Одесса, Украина)
E-mail: yuri_v_k@rambler.ru

Швец Н.В.
(ОНАПТ, Одесса, Украина)
E-mail: shvetsnv0601@gmail.com

В развитие теории протекания [1] в работах [2], [3] введено представление о мультимасштабных элементах перколяционного кластера. Наличие в кластере таких элементов предполагает формирование структур, доминирующей чертой которых становится тотальная мультимасштабность. Это приводит, в частности, к тому, что статистическое самоподобие и развитая фрактальность перколяционного кластера, характерные для промежуточной асимптотики, наблюдаются во всём диапазоне масштабов, а также, к существенному увеличению количества параметров, описывающих структуру и свойства исследуемой системы.

Авторами предложена и исследована перколяционная модель кластерных систем с «нулевым» порогом. В модели это означает, что для любого сколь угодно малого положительного числа ϵ можно указать фигуру, которая содержит кластер, и площадь которой не превышает ϵ. Одной из особенностей модели является построение бесконечных кластеров из фрактальных элементов, в первую очередь, – предфракталов двумерного множества Кантора.

По аналогии с [1] в модели определена мультипликативная мера (по Лебегу) для двухмерного двухмасштабного канторова множества с образующими квадратами заданной относительной площади, обладающими долями меры квадрата предшествующего поколения. В такой постановке задачи множество есть мультифрактал, для адекватного описания которого, как известно, требуется набор мер; показано, что в данном случае достаточно двух показателей скейлинга – одного для фрактального носителя, другого для вероятностей. В работе получена фрактальная размерность множества, на котором сосредоточена мера; она описывает скейлинговое поведение энтропии разбиения меры, и с точностью до множителя равна её информационной размерности – второй из спектра обобщённых размерностей Реньи.

Понятие размерности самоподобия, как известно, позволяет целенаправленно строить регулярные фрактальные множества с наперед заданной размерностью. Для количественной оценки различия между фракталами одинаковой размерности в [4] введено представление о лакунарности множества. В докладе предложен алгоритм расчёта лакунарности ряда конструктивных фракталов, используемых при моделировании мультимасштабных элементов.

В модели получены также аналитические выражения для расчёта силовых полей классического двумерного канторова множества и его модификаций, отличающихся симметрией. Проведен расчёт и визуализация силовых полей трёх модификаций множества.

Литература

[1] J. Feder. Fractals. *New York: Plenum Press*, 1988.
[2] A. Herega. AIP Conference Proceedings. 1683 (2015) 020071.
[3] A. Herega et al. AIP Conference Proceedings 1783 (2016) 020072.
[4] B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature. *San Francisco: W.H. Freeman and Co.*, 1982.

Хирургия орбифолдов и её применение в кристаллографии

А. А. Дышлис
(Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара)
E-mail: a-prokhoda@mail.ru

С. М. Покась
(Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова)
E-mail: pokas@onu.edu.ua

А. С. Прохода
(Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара)
E-mail: a-prokhoda@mail.ru

В топологии и современной геометрии широко распространены специфические операции, которые позволяют из одних многообразий получать другие многообразия. Это операции склеивания многообразий и обратная к ней операция разрезания многообразий, операция приклеивания и переклеивания, операция заплаты и образования дыр. Все эти операции получили название хирургии многообразий ([1], [2]). Великим "Хирургом" был Уильям Тёрстон, который разработал метод исследования трехмерных многообразий, основанный на разрезании их на куски, допускающий локально-однородную метрику (Филдсовская премия, 1983 год).

В настоящей работе развивается идея, также принадлежащая Тёрстону высказанная в ([3]), получения модели идеального кристалла евклидовой геометрии. Строится алгоритм, позволяющий по схеме склейки фундаментальной области фундаментальной группы многообразия, получать разбиения носителя геометрии на ячейки, декорируемые атомами (модель идеального кристалла). В данном исследовании используется тот факт, что модель идеального или реального кристалла можно получить путем действия кристаллографической группы симметрии на фундаментальную область этой группы, причем группа задается с помощью ее генетического кода. С другой стороны схема склейки кодируется, словом, принадлежащим фундаментальной группе многообразия, с помощью которого получается разбиение накрытия многообразия. В частности используются наши результаты, относящиеся к кристаллическим множествам неевклидовых двумерных геометрий при помощи которых можно получить путем склейки модели кристаллов сферической геометрии S^2 и геометрии Лобачевского H^2.

В трехмерном случае для кристаллического множества атомов системы Al-Mn геометрии H^3 показано, что группа симметрии декорированного атомами икосаэдра (икосаэдра Маккея), состоящего из 54 атомов связана с многообразием Зейферта-Вебера полученного путем склеивания соответствующих граней Платонового додекаэдра. Некоторые из рассмотренных здесь результатов рассмотрены в рукописи направленной в печать книги авторов А.А. Дышлис, С.М. Покась ([4]). Кроме того, получены разбиения сферы, обладающие симметрией произвольной диэдральной группы и группой симметрии икосаэдра, которые получены путем операции разрезания и переклеивания сферических многоугольников.

Литература

[1] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко. *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* Москва : Издательство МГУ, 1991.

[2] А. Т. Фоменко. *Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мирею*, 2-ое изд. Москва : Издательство МГУ, "ЧеРо", 1998.

[3] У. Тёрстон. *Трехмерная топология и геометрия*, перевод с английского под ред. О.В. Шварцмана. Москва : МЦНМО, 2001.

[4] С. М. Покась, А. А. Дышлис. *Геометрия Лобачевского и ее применения в математике, физике, кристаллографии.* Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017.

Задача Коши для матричных факторизаций уравнения Гельмгольца в трехмерной неограниченной области

Жураев Д.А.
(Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан)
E-mail: juraev_davron@list.ru

В работе рассмотрена регуляризация задача Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизуемой оператором Гельмгольца в трехмерной неограниченной области. Используя результаты работ ([1]–[5]), построено в явном виде матрица Карлемана и на ее основе регуляризованное решение задачи Коши. Рассматриваемая задача относится к некорректным задачам, т.е. она неустойчива. В некорректных задачах теорема существования не доказывается, существование предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [6]. Условная устойчивость задачи следует из работы А. Н. Тихонова [5], если сузить класс возможных решений до компакта.

В данной работе построено семейство вектор-функций $U_{\sigma\delta}(x) = U_\sigma(x, f_\delta)$ зависящих от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ в точке $x \in G$.

Следуя А. Н. Тихонову [5], семейство вектор-функций $U_{\sigma\delta}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи. Для специальных областей задача продолжения ограниченных аналитических функций в случае, когда данные задаются точно на части границы, было рассмотрена Т. Карлеманом [2]. Используя идеи М. М. Лаврентьева [3], Ш. Ярмухамедовым было построено в явном виде регуляризованное решение задачи Коши для уравнения Лапласа [4].

Во многих корректных задачах для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизуемой оператором Гельмгольца, недоступно вычисление значение вектор-функции на всей границе. Поэтому, задача восстановления, решения систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизуемой оператором Гельмгольца ([7]–[8]), является одной из актуальных задач теории дифференциальных уравнений.

Пусть $\mathbb{R}^3$-трехмерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3,\;\; y = (y_1,\, y_2,\, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$x' = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\;\; y' = (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$G \subset \mathbb{R}^3$-неограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂G (∂G-простирается до бесконечности), т.е. $\partial G = S \bigcup T$.

Рассмотрим в области G систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \tag{1}$$

где $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Пусть, граница области G состоит из гиперплоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, простирающейся до бесконечности и лежащей в слое

$$0 \leqslant y_3 \leqslant h,\;\; h = \frac{\pi}{\rho},\;\; \rho > 0.$$

Будем предполагать, что S задано уравнением

$$y_3 = \psi(y_1,\, y_2),\;\; -\infty < y_1 < \infty,\;\; -\infty < y_2 < \infty,$$

где $\psi(y')$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial\psi(y')}{\partial y_j}\right| \leqslant M < \infty,\ \ y' \in \mathbb{R}^2,\ \ j = 1,\, 2.$$

Обозначим

$$H_\rho(G) = \left\{\, U(y) : \, U(y) \in H(G),\ |U(y)| \leqslant \exp\left[o\left(\exp\rho\left|y'\right|\right)\right]\,,\ y \to \infty,\ y \in G \right\}. \tag{2}$$

Постановка задачи. Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ и

$$U(y)|_S = f(y),\ \ y \in S. \tag{3}$$

Здесь, $f(y)$ — заданная непрерывная вектор-функция на S. Требуется восстановить вектор-функцию $U(y)$ в области G, исходя из её значений $f(y)$ на S.

Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ и вместе $U(y)$ на S задано ее приближение $f_\delta(y)$, соответственно, с погрешностью $0 < \delta < 1$, $\max\limits_S |U(y) - f_\delta(y)| \leqslant \delta$.

Теорема 1. *Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ удовлетворяет на части плоскости $y_3 = 0$ граничную условию*

$$|U(y)| \leqslant 1,\ \ y \in T. \tag{4}$$

Если

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S N_\sigma(y,\, x) f_\delta(y) ds_y,\ \ x \in G, \tag{5}$$

то справедлива оценка

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leqslant C_\rho(x)\sigma\delta^{\,\frac{x_3}{h}},\ \ \sigma > 1,\ \ x \in G. \tag{6}$$

Здесь для удобства, функции, зависящие от x и ρ, обозначим через $C_\rho(x)$. Причем в различных неравенствах они различные.

Следствие 2. *Предельное равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x),$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G.

Литература

[1] Н. Н. Тарханов Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных и некоторых его приложениях. *Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Институт физики АН СССР, Красноярск*, 47–160, 1980.

[2] Carleman T. *Les fonctions quasi analytiques.* Paris. Gautier-Villars et Cie. 1926.

[3] М. М. Лаврентьев *О некоторых некорректных задачах математической физики.* Новосибирск: Наука, 1962.

[4] Ш. Ярмухамедов Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа. *Сиб. мат. журнал.* 45(3) : 702–719, 2004.

[5] А. Н. Тихонов О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. *Докл. АН СССР.* 151(3) : 501–504, 1963

[6] А. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер *Уравнения с частными производными.* Москва.: Мир, 1966.

[7] Д. А. Жураев Интегральная формула для систем уравнений эллиптического типа. *II Международная научно-практическая конференция студентов и аспирантов «Математика и ее приложения в современной науке и практике». Курск*, 33–38, 2012.

[8] Д. А. Жураев Регуляризация задача Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка. *Узбекский Математический журнал.* №. 2. : 61-71, 2016

Факторный анализ динамики процесса выживания микромицетов в фруктово-ягодных сиропах

Кирилов В.Х.
(ОНАПТ, Одесса, Украина)
E-mail: vladkir@renome-i.net

Худенко Н.П.
(ОНАПТ, Одесса, Украина)
E-mail: khudenkon@mail.ru

Витюк А.В.
(ОНАПТ, Одесса, Украина)
E-mail: vityk.1969@ukr.net

С целью разработки способов консервирования фруктово-ягодных сиропов, которые исключают применение высокотемпературной стерилизации и консервантов, определяли выживаемость спор плесневых грибов B. nivea в модельных средах с разной концентрацией пищевых осмотически деятельных веществ (сахарозы, этилового спирта, лимонной кислоты) оказывают при определенной концентрации летальное действие на микроорганизмы, [1].

Факторный анализ таблицы данных осуществлялся в среде SPSS. Важный этап работы — выбор параметров процедуры факторного анализа и расчёт следующих показателей: одномерные дисперсии; матрица корреляции, уровни значимости. Для определения меры адекватности выборки определили коэффициент Бартлета [2], [3].

В нашем случае рассматриваемый тест показывает весьма низкую значимость (менее 0.001), из чего следует вывод о применимости факторного анализа.

Выбран метод факторизации редуцированной корреляционной матрицы и определено число ожидаемых факторов.

Результаты факторного анализа: при первоначальной факторизации получена следующая факторная матрица компонент и общности (табл.1)

Таблица 1. Матрица компонент и общности

	Весовые компоненты		общности
	1	2	извлеченные
количество грибков y	-0.963	-7E-018	0.928
время x_1	0.207	0.057	0.046
сахар x_2	0.886	-0.217	0.833
кислота x_3	0.185	0.975	0.984
спирт x_4	0.255	0.00	0.065

Значения общности переменной лежат в диапазоне от 0 до 1, они позволяют понять, какая часть дисперсии переменной объясняется общими факторами. Чем выше значение общности переменной, тем лучше факторная модель объясняет дисперсию анализируемого признака.

Корреляционная матрица была подвергнута процедуре анализа по методу главных компонент. Было извлечено 2 фактора с собственными значениями близкими к 1 (табл.2) и получена матрица повернутых компонент (табл.3)

Таблица 2. Полная объяснения дисперсия

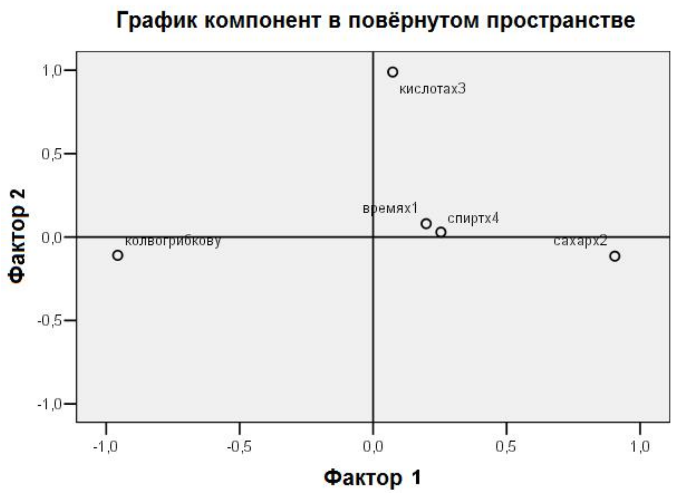
Компонента	Сумма квадратов нагрузок извлечения			Суммы квадратов нагрузок вращения		
	Всего	% дисперсии	Кумулятивный %	Всего Всего	% дисперсии	Кумулятивный %
1	1.855	37.106	37.106	1.844	36.885	36.885
2	1.00	20.000	57.106	1.011	20.221	57.106

Эти факторы подверглись вращению по методу варимакс с нормализацией Кайзера. Факторы, полученные в результате вращения по методу варимакс, объясняют состав общей дисперсии. Вращение сошлось за 3 итерации.

Таблица 3. Матрица повернутых компонент

	Весовые компоненты	
	1	2
количество грибков y	-0.957	-0.109
время x_1	0.199	0.080
сахар x_2	0.905	-0.115
кислота x_3	0.073	0.989
спирт x_4	0.254	0.029

Получен график компонент в повернутом пространстве:



В результате факторного анализа количество переменных трёх: y_1 — количество грибков; F_1 — Фактор 1; F_2 — Фактор 2. Далее по статистической зависимости (y_1, F_1, F_2) (корреляция) устанавливаем вид корреляционной поверхности $y_1 = f(F_1, F_2)$ отображающей многомерную регрессию исходных пяти переменных $F(y, x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Литература

[1] Л. А. Осипова. Исследование выживаемости спор плесневых грибов вида BYSSOCHLAMYS NIVEA во фруктово-ягодных сиропах. *Наукові праці/ОНАХТ*, 2014. Вип.45, Т.2 С. 21-24.

[2] Ю.П. Дубнов. Обработка статистической информации с помощью SPSS. *М.: ООО «Издательство АСТ»; Издательство «НТ Пресс»*, 2004. 221 с.

[3] Ефим Бююль, Петер Цёфель. SPSS: искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей. *Спб.: ООО «Диасофтюп»*, 2005. 608 с.

Риманова геометрия фундаментального распределения

В. Ф. Кириченко
(Московский педагогический государственный университет, ул. Малая Пироговская 1, Москва, 119882, Россия)
E-mail: highgeom@yandex.ru

Е. В. Суровцева
(Московский педагогический государственный университет, ул. Малая Пироговская 1, Москва, 119882, Россия)
E-mail: surovtseva_elena@inbox.ru

Пусть M — нечетномерное гладкое многообразие. Почти контактной метрической структурой (короче, АС-структурой) на M называется четверка (η, ξ, Φ, g), где η -дифференциальная 1-форма, ξ — характеристическое векторное поле, Φ — структурный эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на M и выполняются следующие условия:
1) $\eta(\xi) = 1$; 2) $\eta \circ \Phi = 0$; 3) $\Phi(\xi) = 0$; 4) $\Phi^2 = -\mathrm{id} + \eta \otimes \xi$
5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y); X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
Доказана основная

Теорема 1. *Контактное распределение почти контактного метрического многообразия вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда справедливо следующее соотношение:*

$$\nabla_{\Phi(Y)}(\Phi)\Phi(X) = \nabla_{\Phi(X)}(\Phi)\Phi(Y).$$

Применим ее для исследования конкретных структур.

Квази-сасакиевы структуры. Квази-сасакиевой структурой называется нормальная почти контактная метрическая структура с замкнутой фундаментальной формой.

Теорема 2. *Пусть M — квази-сасакиево многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) контактное распределение многообразия M инволютивно;
(ii) $\nabla_{\Phi X}\xi = 0$;
(iii) M – косимплектическое многообразие.

Теорема 3. *Контактное распределение квази-сасакиева многообразия вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда это многообразие является косимплектическим. В этом случае на максимальных интегральных многообразиях контактного распределения индуцируется келерова структура.*

Так как косимплектические многообразия являются частным случаем квази-сасакиевых, то можем сформулировать

Следствие 4. *На максимальных интегральных многообразиях контактного распределения косимплектического многообразия индуцируется келерова структура.*

Локально конформно квази-сасакиевы структуры. Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)-$АС-структура на многообразии M^{2n+1} размерности свыше трех. Конформным преобразованием АС-структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M^{2n+1} размерности свыше трех называется переход от S к АС-структуре $\widetilde{S} = (\widetilde{\eta}, \widetilde{\xi}, \widetilde{\Phi}, \widetilde{g})$, где $\widetilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$, $\widetilde{\xi} = e^{\sigma}\xi$, $\widetilde{g} = e^{-2\sigma}g$, σ-произвольная гладкая функция на M, называемая *определяющей функцией преобразования.* АС-структура S на M называется локально конформно квази-сасакиевой (короче, $lcQS-$ структурой), если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в квази-саксакиеву структуру. Будем называть это преобразование локально-конформным (примером $lcQS$-структур являются структуры Кенмоцу).

Теорема 5. *Пусть M — $lcQS$-многообразие с инволютивным первым фундаментальным распределением. Тогда на интегральных многообразиях максимальной размерности его контактного* *распределения индуцируется структура класса* W_4 *почти эрмитовых структур в классификации Грея-Хервеллы. Она будет келеровой тогда и только тогда, когда* $\operatorname{grad} \sigma \subset \mathfrak{M}$ *принадлежит второму фундаментальному распределению.*

Литература

[1] Кириченко В.Ф., *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Одесса: "Печатный Дом"2013 г. 458 с.

[2] Кириченко В.Ф., *О геометрии многообразий Кенмоцу* // Доклады академии наук, М., т.380 (5), 2001, 585–587.

[3] Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р., *Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий* // Математический сборник, т.8 (193),

[4] Кириченко В.Ф.,Баклашова Н.С., *Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты* // Математические заметки, 2007, т.82 (3), 347-360.

Канонические квази-геодезические отображения рекуррентно-параболических пространств

Лозиенко Д.В.
(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: lozienkodv@gmail.com

Курбатова И.Н.
(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Изучая проблему моделирования физических полей, академик А. З. Петров пришел к задаче квазигеодезического отображения (КГО) 4-х мерных римановых пространств сигнатуры Минковского [1]. В [2] исследовались КГО римановых пространств произвольной размерности и сигнатуры с рекуррентно-параболической структурой.

Многообразие X_n считается наделенным *e-структурою* [3], если на нем определена аффинорная структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая условиям $F_i^\alpha F_\alpha^h = e\delta_i^h$, где $e = -1, 1$ или 0. При $e = 1$ ее называют гиперболической; при $e = -1$ — эллиптической; при $e = 0$ — параболической.

В зависимости от дифференциальных свойств аффинора в римановом пространстве с e-структурой выделяют различные классы пространств: келеровы, K-пространства, H-пространства и др.

В [2] *рекуррентно-параболическую* структуру на (V_n, g_{ij}) определили как аффинорную структуру $F_i^h(x)$, для которой

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i},$$

$$F_{i,j}^h = \rho_j(x) F_i^h(x),$$

где ρ_j — ковектор, «,» — знак ковариантной производной в V_n. Само V_n при этом также называют *рекуррентно-параболическим.*

Рассмотрим пару римановых пространств (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, находящихся в КГО, основные уравнения которых в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид [1]:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$

$$\overline{F}_{(ij)}(x) = 0, \qquad \overline{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)\overline{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ — компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n, соответственно; ψ_i, φ_i — ковекторы; F_i^h — аффинор.

Мы исследуем канонические квази-геодезические отображения (ККГО) — класс КГО, для которого в основных уравнениях $\psi_i \equiv 0$.

Нами доказана

Теорема 1. *Если V_n с рекуррентно-параболической структурой F_i^h допускает ККГО на риманово пространство $\overline{V}_n$, то $\overline{V}_n$ по необходимости также будет рекуррентно-параболическим относительно F_i^h с тем же вектором рекуррентности.*

Рассмотрено ККГО рекуррентно-параболического V_n на плоское пространство $\overline{E}_n$. Получена структура тензора Римана такого V_n. В частности, показано, что оно является Риччи-плоским и симметрическим.

Доказана

Теорема 2. *Для того, чтобы параболически-рекуррентное пространство V_n при $n \neq 2$ допускало нетривиальное ККГО на плоское $\overline{V}_n = \overline{E}_n$, необходимо и достаточно, чтобы оно было Риччи-плоским, а его тензор Римана имел структуру*

$$R_{hijk} = C_1 e^{-\rho(x)}(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj})$$

при некоторой константе C_1 и $\rho_i = \partial_i \rho(x)$.

Литература

[1] А. З. Петров. Моделирование физических полей. *Гравитация и теория относительности*, No. 4-5 : 7–21, 1968.

[2] И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк. Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств. *Proceedings of the International Geometry Center*, volume 8, No. 1 : 57–66, 2015.

[3] Н. С. Синюков. Геодезические отображениях римановых пространств. Москва : Наука, 1979.

О задаче преследования, описываемой дифференциальными уравнениями дробного порядка

Маматов М. Ш.
(Национальный Университет Узбекистана, Ташкент Узбекистан)
E-mail: mamatovmsh@mail.ru

Алимов Х.Н.
(Самаркандский Государственный университет, Самарканд Узбекистан)
E-mail: mamatovmsh@mail.ru

В настоящей заметке будем рассматривать игровую задачу, описываемую уравнениями дробного порядка вида

$$ {}_0^C D_t^{\alpha_i} z_i(t) = z_{i+1}(t), \qquad i=\overline{1, N-1}, \quad {}_0^C D_t^{\alpha_N} z_N(t) = -u(t)+\upsilon(t), \tag{1}$$

где ${}_0^C D_t^{\alpha_i}$ — оператор дробного дифференцирования, $\alpha_i \in (0,1]$, $t \in [0,T]$, a_{ij} — коэффициенты, u, υ — управляющие параметры u — управляющий параметр преследующего игрока, $u(t) \in L_p[0,T]$, $\|u(t)\| \leqslant \rho$, υ — управляющий параметр убегающего игрока, $\upsilon(t) \in L_p[0,T]$, $\|\upsilon(t)\| \leqslant \sigma$, $i,j=\overline{1,N}$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Начальные и конечные условия для системы (1) зададим в виде

$$z(0)=z^0=(z_1^0, z_2^0, ..., z_N^0), \tag{2}$$

$$z(T)=z^T=(z_1^T, z_2^T, ..., z_N^T) \tag{3}$$

Дробную производную будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто [1]. Напомним, что дробная производная Капуто произвольного нецелевого порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x) \in AC^{[\alpha]+1}(a,b)$, $a, b \in R^1$, определяется выражением

$$ {}_{a+}^C D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int\limits_a^x \frac{d^{[\alpha]+1} f(\xi)}{d\xi^{[\alpha]+1}} \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\{\alpha\}}}.,$$

Будем говорить, что в игре (1) возможен перевод точки z из начальной точки z^0 в конечную точку z^T, если существует число $T=T(z^0,\ z^T) \geqslant 0$ такое, что для любого допустимого управления $\upsilon(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ убегающего игрока, зная в каждый момент времени $t \in [0,T]$ уравнение (1) и значения $\upsilon(t)$ в игре (1) можно выбрать значение $u(t)$ таким образом, что:

1) $u(\cdot)$ - допустимое управление преследующего игрока;
2) $z(T)=z^T$, где $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, - решение соответствующей задачи (1), (2) при управлениях $u(t)$, $\upsilon(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 1. *Если $\rho > \sigma$ и α_N , p' удовлетворяет неравенству $\alpha_N > \frac{p'-1}{p'}$,то в игре (1), (2), (3) возможен перевод точки z из z^0 в z^T, где пространства $L_p[0,T]$ и $L_{p'}[0,T]$ являются сопряженными, т.е. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $1<p<\infty$, $1<p'<\infty$.*

Литература

[1] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam: Elsevier, 2006.-500.

Способы создания проблемных ситуаций в процессе развитие творческого мышления студентов

Маматов М.Ш.
(Национальный Университет Узбекистана, Ташкент Узбекистан)
E-mail: mamatovmsh@mail.ru

Эсонов Э.Э.
(Ташкентский государственный технический университет, Ташкент Узбекистан)
E-mail: mamatovmsh@mail.ru

Независимо выбора метода изложения материала и организации учебного процесса, в основе при проблемном обучении лежит последовательное и целенаправленное создание проблемных ситуаций, мобилизующих внимание и активность учащихся [1]. В связи с этим, одна и та же задача может являться или не являться проблемной, в зависимости, в первую очередь, от уровня развития учащихся. Задача становится проблемной, если она носит познавательный, а не закрепляющий, тренировочный характер. Все это и определяет характер проблемного обучения как развивающего. Проблемная ситуация может находиться в зоне ближайшего развития, когда учащийся может разрешить ее только на границе своих возможностей, при максимальной активации своего интеллектуального, творческого и мотивационного потенциала. Определяют проблемную ситуацию как интеллектуальное затруднение человека, возникающее в случае, когда он не знает, как объяснить возникшее явление, факт, процесс действительности, не может достичь цели известным ему способом, что побуждает человека искать новый способ объяснения или способ действия. Поэтому проблемной можно назвать ту ситуацию, когда учащийся не может объяснить для себя объективно возникающее противоречие, не может дать ответов на объективно возникающие вопросы, поскольку ни имеющиеся знания, ни содержащая в проблемной ситуации информация не содержат на них ответов и не содержат методов их нахождения. С точки зрения психологии это и служит предпосылкой для появления мыслительной активности по выявлению и решению проблем.

Наиболее функциональной и распространенной является разделение проблемных ситуаций по характеру содержательной стороны противоречий на четыре типа:

1. Недостаточность прежних знаний учащихся для объяснения нового факта, прежних умений для решения новой задачи;
2. Необходимость использовать ранее усвоенные знания и умения, навыки в принципиально новых практических условиях;
3. Наличие противоречия между теоретически возможным путем решения задачи и практической неосуществимости выбранного способа;
4. Наличие противоречия между практически достигнутым результатом выполнения учебного задания и отсутствием у учащихся знаний для его теоретического обоснования.

Проблемная ситуация должна вызывать интерес учащихся своей необычностью, неожиданностью, нестандартностью. Такие положительные эмоции, как удивление, интерес служат благоприятным подспорьем для обучения. Одним из самых доступных и действенных методов достижения этого эффекта служит максимальное акцентирование противоречий: как действительных, так и кажущихся или даже специально организованных преподавателем с целью большей эффектности проблемной ситуации.

Литература

[1] Лептина И., Семенова Н. *Применение эффективных технологий обучения* // Учитель. 2003. №1.

О задаче преследования по позиции в дифференциальных играх

Маматов М.Ш.
(Национальный Университет Узбекистана, Ташкент Узбекистан)
E-mail: mamatovmsh@mail.ru

Собиров Х.Х.
(Ташкентский Университет информационных технологий, Ташкент Узбекистан)
E-mail: hhsobirov@gmail.com

Пусть движение объекта в конечномерном евклидовом пространстве R^n описывается дифференциальным уравнением дробного порядка вида

$$\dot{z} = Az + u - \upsilon \tag{1}$$

где $z \in R^n$, $n \geqslant 1$, A — постоянная матрица, u, υ — управляющие параметры u — управляющий параметр преследующего игрока, $u \in P \subset R^p$, υ — управляющий параметр убегающего игрока, $\upsilon \in Q \subset R^q$, P и Q — компакты. Кроме того в R^n выделено терминальное множество M. Цель преследующего игрока вывести z на множество $M + lS$ где $l > 0$ и S — единичный шар, убегающий игрок стремится этому помещать. Настоящая заметка, посвященная получению достаточных условий завершения преследования по позиции. Будем говорить, что из точки $z_0 \in R^n \backslash M$ возможно завершение преследования по позиции, если существует число $T(z_0) \geqslant 0$, такое, что по любому измеримому изменению $\upsilon(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$ параметра υ можно построить такое измеримое изменение $u(t) = u(z,t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, параметра u, что решение $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, уравнения $\dot{z} = Cz - u(t) + \upsilon(t), z(0) = z_0$, попадает на M за время, не превосходящее числа $T(z_0)$, при этом для нахождения значения параметра $u(t)$ в каждый момент времени $t \in [0, T(z_0)]$ разрешается использовать значения $z(s_i)$ вектора фазовых переменных z в дискретные моменты времени $s_1, s_2, \ldots, s_k \in [0, t]$.

Всюду в дальнейшем:

а) терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство R^n, M_1 — подмножество подпространства L — ортогонального дополнения M_0;

б) π — оператор ортогонального проектирования из R^n на L;

в) под операцией $\overset{*}{-}$ понимается операция геометрического вычитания.

Пусть для

$$r \geqslant 0, \qquad \hat{u}(r) = \pi e^{rA} P, \qquad \hat{\upsilon}(r) = \pi e^{rA} Q,$$

$$\hat{w}(r) = \hat{u}(r) \overset{*}{-} \hat{\upsilon}(r) \qquad W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(r) dr, \ \tau > 0, \ \ W_1(\tau) = -M_1 + W(\tau).$$

Теорема 1. *Если в игре (1) при некоторой $\tau = \tau_1$, выполняется включение $-\pi e^{A\tau} z_0 \in W(\tau)$, то из начального положения z_0 можно завершить преследование по позиции за время $T = \tau_1$.*

Литература

[1] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* - М.: Наука, 1974. - 455 с.

Движения в геометрии Лобачевского и алгебры операторов Бергмана со сдвигами

Мозель В. А.
(Одесса, ГУ "Отделение гидроакустики ИГФ НАН Украины", ул. Преображенская, 3)
E-mail: mozel@ukr.net

Пусть D - единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В банаховом пространстве $L_p(D)$ введём следующие операторы: хорошо известный оператор с ядром Бергмана (см., напр., [1], [2])

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2} dD_\zeta,$$

и

$$(W_g f)(z) = \left| g'(z) \right|^{2/p} f(g(z))$$

— изометрический оператор взвешенного сдвига, порождённый конформным отображением $g \in G$ круга D в себя, G — циклическая группа конечного порядка $n+1$ (g — эллиптическое отображение с одной неподвижной точкой внутри D и второй, ей симметричной, вне D), либо бесконечного порядка (g — гиперболическое отображение с двумя неподвижными точками на абсолюте, или параболическое отображение со сдвоенной неподвижной точкой на абсолюте в смысле модели Пуанкаре геометрии Лобачевского ([3], с.59-67)).

В данной работе изучается банахова алгебра

$$\mathfrak{C} = \sum_{g \in G} A_g W_g,$$

которая является расширением алгебры $\mathfrak{A}$ операторов вида $A = \sum_{i=0}^{n} (a_i(z)I + b_i(z)B + L)$ для конечного случая, $A = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_i(z)I + b_i(z)B + L)$ для бесконечного случая, где I — единичный, L — компактный оператор $a_i(z)$, $b_i(z)$ — автоморфные функции [4] (т.е. удовлетворяющие условию $a_i(g(z)) = a_i(z)$, $b_i(g(z)) = b_i(z)$), непрерывные на римановой поверхности $\Delta = D/G$ [5], гл. 6, с.110 — 117, с помощью операторов взвешенного сдвига W_g. Норма в алгебре $\mathfrak{C}$ вводится правилом:

$$|||C|||_1 = \sum_{g \in G} \sup_{g \in G} |||A_g|||$$

Операторы алгебры $\mathfrak{C}$ можно записать в виде

$$R_G C R_G^{-1} = \sum_{i=0}^{n} (a_i(z)E + b_i(z) R_G B R_G^{-1}),$$

для конечного случая,

$$R_G C R_G^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i(z)E + b_i(z) R_G B R_G^{-1}),$$

для бесконечного случая, E — единичная матрица, $R_G = \operatorname{diag}(P_j W^j)$, $R_G^{-1} = \operatorname{diag}(W^j P_j)$, P_j — оператор проектирования на j — й экземпляр фундаментальной области [5], гл. 9, с.183–226.

В конечном случае риманова поверхность есть конус. В параболическом случае риманова поверхность — это изогнутый конус с каспом в вершине. В гиперболическом случае это изогнутый цилиндр. В эллиптическом случае коэффициенты непрерывны в замкнутом круге D. В бесконечном же случае в предельных (неподвижных) точках сдвига у коэффициентов имеется разрыв периодического типа.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор $C \in \mathfrak{C}$ фредгольмов (нётеров) в пространстве $L_p(D)$, если и только если его символ (см., напр., [6]) невырожден.*

Отметим, что символы и спектры линейных функциональных операторов были вычислены в различных ситуациях А. Б. Антоневичем [7] и Ю. И. Карловичем [8], [9]. См. также книгу Б. А. Пламеневского [10] и цитируемую там литературу.

Литература

[1] А. Д. Джураев. *Метод сингулярных интегральных уравнений*. Москва: Наука, 1987.

[2] Г. Джангибеков. Об алгебре, порождённой поли-кернооператорами со сдвигом. *ДАН Тадж.ССР*, 34(7) : 399–403, 1991.

[3] Б. В. Шабат. *Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного: Учебник для университетов*. Изд. 3-е. Москва: Наука, 1985. - 336 с.

[4] В. В. Голубев. *Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции*. Москва: Физматгиз, 1961. - 456 с.

[5] А. Бердон. *Геометрия дискретных групп*. Москва: Физматгиз, 1986. - 304 с.

[6] Н. Л. Василевский. Символы операторных алгебр *ДАН СССР*, 235 (1): 15 – 18, 1977.

[7] А. Б. Антоневич. *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*. Минск: Университетское, 1988. - 232 с.

[8] Ю. И. Карлович. Локально-траекторный метод изучения обратимости в C^* -алгебрах операторов с дискретными группами сдвигов *ДАН СССР*, 299 (3): 546 – 550, 1988.

[9] Karlovich Yu.I. Local-trajectory method and isomorphism theorems for nonlocal C^* -algebras *Operator Theory: Advances and Applications*, 170: 137 – 166, 2007.

[10] Б. А. Пламеневский. *Алгебры псевдодифференциальных операторов*. Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 256 с.

Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий уравнения теплопроводности

Нарманов Отабек Абдигаппарович
(Ташкентский университет информационных технологий,Ташкент,Узбекистан)
E-mail: otabek.narmanov@mail.ru

Пусть нам дано дифференциальное уравнение порядка m

$$\Delta(x, u^{(m)}) = 0 \tag{1}$$

от n независимых от $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и q зависимых переменных $u = (u_1, u_2, ..., u_q)$, содержащее производные от u по x до порядка m, где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X = R^n$, $u = (u_1, u_2, ..., u_q) \in R^q$.

Определение 1. Группа G преобразований, действующая на открытом подмножестве M пространства независимых и зависимых переменных дифференциального уравнения называется группой симметрий уравнения (1) , если для каждого решения $u = f(x)$ уравнения (1) и для $g \in G$ такого, что определено $g \circ G$, то функция $\widetilde{u} = g \circ G$ также является решением уравнения.

Одним из преимуществ знания группы симметрий дифференциальных уравнений состоит в том, что если нам известно решение $u = f(x)$, то в соответствии с определением функция $\widetilde{u} = g \circ f$ также является решением для любого элемента g группы G, так что у нас есть возможность построить целое семейство решений, подвергая известное решение действию всевозможных элементов группы.

Для нахождения группы симметрий "продолжим"основное пространство, представляющее независимые и зависимые переменные, до пространства, представляющего также все различные частные произ-водные, встречающиеся в уравнении. Для данной гладкой функции $u = f(x)$, имеется индуцированная функция $u^m = pr^m f(x)$, называемая $-m$ продолжением функции $f(x)$, которая определяется уравнениями $u_j^\alpha = \partial_j f^\alpha(x)$, где $\partial_j f^\alpha(x)$ производная порядка α функции $u = f(x)$.

Теперь мы можем заменить дифференциальное уравнение $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$ алгебраическим уравнением, которое определяется обращением в нуль функции, которая является правой частью уравнения $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$, определенной на $X \times U^m$. Гладкое решение дифференциального уравнения $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$ - гладкая функция $u = f(x)$ такая, что $\Delta(x, pr^{(m)}u) = 0$. Это означает, что функция $u = f(x)$ и ее производные $u_j^\alpha = \partial_j f^\alpha$ должны удовлетворять алгебраическому уравнению

$$F(x, t, pr^{(m)}u(x)) = 0 \tag{2}$$

Процедура нахождения инфинитезимальных образующих группы симметрий дифференциальных уравнений описана в работе [5].Это процедура использует продолжения действия группы симметрий на расширенное пространство. Инфинитезимальные образующие продолжения действия группы симметрий являются продолжениями инфинитезимальных образующих группы симметрий основного пространтсва. Эту схему используем для нахождения группы симметрий одномерного уравнения теплопродности.

Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности с коэффициентом нелинейности $k(u)$, которое описывает процесс переноса тепла в предположении, что среда является неподвижной и дополнительные источники или стоки энергии в среде отсутствуют:

$$u_t = (k(u)u_x)_x \tag{3}$$

Наибольший интерес представляет собой случай,когда коэффициент теплопроводности $k(u)$ является нелинейной функцией температуры u. Исследования показывают,что коэффициент теплопроводности в достаточно широком диапазоне изменения параметров может быть описан степенной функцией температуры ([1]-[6]), т. е. имеет вид $k = u^\sigma$.

Мы рассмотрим случай $k(u) = u$.

Теорема 2. *Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий уравнеия (1.3) является трехмерной алгеброй Ли,порожденной векторными полями:*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Рассмотрим векторное поле (случай $a = 0$)

$$X = d\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x}.$$

Это векторное поле порождает преобразования вида

$$(t, x, u) \to (t + ds, x + bs, u).$$

Функция $F(t, x) = bt - dx$ является инвариантом этих преобразований в силу того, что $X(F) = 0$. Поэтому если $\xi = bt - dx, b = d^2$,то функция $u(t, x) = v(\xi)$ является решением уравнения (1.3), где $v(\xi)$ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$vv'' + v'^2 - v' = 0.$$

Рассмотрим случай $a \neq 0$.Так как $X(\xi) = 0$, функция

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

является инвариантом группы преобразований, порожденных векторным полем

$$X = 2at\frac{\partial}{\partial t} + ax\frac{\partial}{\partial x}.$$

В этом случае решение ищем в виде:

$$u(t, x) = v(\xi)$$

где фунция $v(\xi)$ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$vv'' + v'^2 + \frac{\xi}{2}v' = 0. \tag{4}$$

Литература

[1] Брюно А.Д. Автомодельные решения и степенная геометрия, УМН 2000, том 55, выпуск 1(331),с. 3- 44

[2] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. Драфт.2011,436 стр.

[3] Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. Москва, Изд.МФТИ.1997,235 стр.

[4] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений, Математика-кибернетика, Москва Издательство "Знание"1991

[5] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнением. Москва, Мир, 1989, 639 стр.

[6] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва, Наука,1987,481стр.

О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга

Нарманов Абдигаппар Якубович
(Национальный университет Узбекистана,Ташкент,Узбекистан)
E-mail: narmanov@yandex.ru

Турсунов Байрамали Акбарович
(Каршинский государственный университет,Карши,Узбекистан)
E-mail: t.bayramali@yandex.com

В этой работе мы изучим геометрию некоторых субмерсий, которые возникают при исследовании геометрии орбит векторных полей Киллинга. Геометрия орбит векторных полей является объектом многочисленных исследований в связи ее важностью в геометрии и других областях математики [2].

Изучению геометрии субмерсий посвящены многочисленные исследования ([1]-[5]), в частности в работе [3] получены фундаментальные уравнения субмерсии.

Пусть $M-$гладкое риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g, $\nabla-$ связность Леви-Чивита, $<\cdot,\cdot>-$ скалярное произведение, определенное римановой метрикой g.

Напомним, что векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий [2]. Множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Известно, что алгебра Ли $K(M)$ является конечномерной.

Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^∞.

Определение 1. Дифференцируемое отображение $\pi : M \to B$ максимального ранга, где B-гладкое многообразие размерности m, называется субмерсией при $n > m$.

По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом субмерсия $\pi : M \to B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M, слоями которого являются подмногообразия $L_p = \pi^{-1}(p), p \in B$.

Пусть F-слоение размерности k, где $0 < k < n$. Обозначим через T_qF-касательное пространство слоя L_p в точке $q \in L_p$, через H_qF-ортогональное дополнение подпространства T_qF. В результате возникают подрасслоения $TF = \{T_qF\}$, $HF = \{H_qF\}$ касательного расслоения TM и имеем ортогональное разложение $TM = TF \oplus HF$. Таким образом каждое векторное поле X разложимо в виде: $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in HF$. Если $X^h = 0$ (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем.

Напомним, что если дифференциал субмерсии $\pi : M \to B$ сохраняет длину горизонтальных векторов,то она называется римановой. Известно,что риманова субмерсия порождает риманово слоение. Слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой точке к слоению, остается ортогональной к слоению во всех своих точках.

Кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор является горизонтальным.

Пусть $\gamma : [a, b] \to B-$ гладкая кривая в B, и $\gamma(a) = p$. Горизонтальная кривая $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to M$, $\widetilde{\gamma}(a) \in \pi^{-1}(p)$ называется горизонтальным поднятием кривой $\gamma[a, b] \to B$, если $\pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

Отображения $S : V(F) \times HF \to V(F)$, заданное формулой $S(X, U) = \nabla^v_X U$ называется втором основным тензором, где $V(F), HF$-множество всех вертикальных и горизонтальных векторных полей соответственно.

При фиксированным поле нормалей $X \in HF$ отображение $S(U, X)$ обращается в тензорное поле S_X типа (1,1):

$$S(U, X) = S_X U = \nabla^v_U X,$$

где $\nabla^v_U X$-вертикальная компонента векторного поля $\nabla_U X$.

Тензорное поле S_X является линейным отображением и поэтому задается матрицей $S(U,X) = AU$.

Горизонтально векторное поле X называется слоеным, если для каждого поля $V \in V(F)$, поле $[V,X]$ также является вертикальным. В случае, когда поле X является слоеным, собственные значения матрицы A называется главными кривизнами слоения F. Если главные кривизны локально постоянны вдоль слоев, то слоение F называется изопараметрическим.

Рассмотрим следующие n векторные поля Киллинга в R^n, из которых k вращений, $n-k$ параллельных переносов, где $n = 2k + l$.

Пусть

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } i \text{ нечетно и } 1 \leq i \leq 2k,$$

$$Y_i = -x_i \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} + x_{i-1} \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } i \text{ четно и } 1 \leq i \leq 2k,$$

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } 2k+1 \leq i \leq n.$$

Результаты работы [2] показывают,что орбита этих векторных полей для каждой точки совпадает со всем пространством R^n. Поэтому мы можем определить следующую субмерсию $\pi : R^{n+k} \to R^n$ формулой:

$$\pi(t_1, t_2, ..., t_{n+k}) = X_{n+k}^{t_{n+k}}(...(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)...)),$$

где $O-$начало координат в R^n.

Теорема 2. *Существует такая риманова метрика $\widetilde{g}$ на R^n, что*

1) *Отображение $\pi : R^{n+k} \to R^n$ является римановой субмерсией и порождает риманово слоение;*

2) *Субмерсия $\pi : R^{n+k} \to R^n$ порождает на R^{n+k} изопараметрическое слоение;*

3) *$(R^n, \widetilde{g})$ является многообразием неотрицательной кривизны;*

Если $k \geq 2$, то

4) *Субмерсия $\pi : R^{n+k} \to R^n$ порождает на R^{n+k} слоение нулевой кривизны.*

Литература

[1] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

[2] Нарманов А.Я., Саитова С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга. Дифференциальные уравнения. 2014,том 50, №12,с.1582-1589.

[3] O'Neil B. The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p. 459-469

[4] Reinhart B. L. Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 69, No. 1,1959, pp. 119-132

[5] Zoyidov A.N., Tursunov B.A. Geometry of submersions on manifolds of nonnegative curvature. Uzbek mathematical journal. 2015 №2, pp. 27-34.

F-планарные отображения многообразий с аффинорной структурой специального типа

А. С. Нежуренко
(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: nezhurenko94@mail.ru

И. Н. Курбатова
(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Рассматривались F-планарные отображения римановых пространств с рекуррентно-параболической структурой.

F-планарные отображения были введены проф. Н. С. Синюковым и Й. Микешем в [1] как наиболее широкое обобщение теории геодезических отображений римановых пространств и голоморфно-проективных отображений почти комплексных многообразий.

Пусть римановы пространства $V_n\left(g_{ij}, F_i^h\right)$ и $\overline{V}_n\left(\overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h\right)$ находятся в F-планарном отображении. Тогда их основные уравнения в общей по отображению системе координат $\left(x^i\right)$ имеют вид:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x),$$

где $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ — компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n с метрическими тензорами $\overline{g}_{ij}$ и g_{ij}, соответственно; ψ_i, φ_i — векторы; F_i^h — аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование. В [1] доказано, что F-планарное отображение сохраняет аффинорную структуру:

$$\overline{F}(x) = aF(x) + b\delta, \text{ где } a, b = const.$$

В [2] было введено понятие *рекуррентно-параболической* аффинорной структуры $F_i^h(x)$ на римановом пространстве (V_n, g_{ij}), которая характеризуется условиями

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i},$$
$$F_{i,j}^h = \rho_j(x)F_i^h(x),$$

где ρ_j — ковектор, «,» — знак ковариантной производной в V_n. Само V_n при этом также называется *рекуррентно-параболическим.*

Оказывается, что если рекуррентно-параболическое пространство $V_n\left(g_{ij}, F_i^h\right)$ допускает нетривиальное F-планарное отображение на $\overline{V}_n\left(\overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h\right)$, структура которого является почти параболической, то есть в нем имеют место

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad \overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji} = 0, \quad \overline{F}_{ij} = F_j^\alpha \overline{g}_{\alpha i},$$

то оно по необходимости также будет рекуррентно-параболическим.

Используя метод Н. С. Синюкова, разработанный им в теории геодезических отображений римановых пространств [3], мы получили новую форму основных уравнений F-планарных отображений, допускающую эффективное исследование.

Построено инвариантное преобразование, которое позволяет из одной пары рекуррентно-параболических пространств, находящихся в F-планарном отображении, строить бесконечное множество пар пространств с новой рекуррентно-параболической структурой, также допускающих F-планарное отображение друг на друга.

Литература

[1] Й. Микеш, Н. С. Синюков. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности. *Известия ВУЗов. Математика*, No. 1 : 55–61, 1983.
[2] И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк. Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств. *Proceedings of the International Geometry Center*, volume 8, No. 1 : 57–66, 2015.
[3] Н. С. Синюков. Геодезические отображениях римановых пространств. Москва : Наука, 1979.

Инфинитезимальные проективные преобразования 2-ой степени в римановом пространстве второго приближения

Покась С. М.
(Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова)
E-mail: pokas@onu.edu.ua

Крутоголова А. В.
(Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова)
E-mail: 01link01@rambler.ru

В римановом пространстве $V_n(x, g)$ зафиксируем точку M_0 и построим пространство второго приближения $\widetilde{V}_n^2(y, \widetilde{g})$, определив его метрический тензор $\widetilde{g}_{ij}(y)$, [1].

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{3}\underset{\circ}{R}_{il_1l_2j} y^{l_1} y^{l_2}, \tag{1}$$

где $\underset{\circ}{g}_{ij} = g_{ij}(M_0)$ и $\underset{\circ}{R}_{il_1l_2j} = R_{il_1l_2j}(M_0)$. В пространстве $\widetilde{V}_n^2$ изучаются инфинитезимальные проективные преобразования 2-ой степени.

Определение 1. Инфинитезимальные преобразования

$$y'^h = y^h + \widetilde{\xi}^h(y)\delta t \tag{2}$$

называются преобразованиями 2-ой степени, если вектор смещения этих преобразований $\widetilde{\xi}^h$ имеет вид

$$\widetilde{\xi}^h(y) = a^h_{\cdot} + a^h_{\cdot\, l} y^l + a^h_{\cdot\, l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2},$$

где $a^h_{\cdot}, a^h_{\cdot\, l}, a^h_{\cdot\, l_1 l_2} - const$.

Известно ([2]), что в римановом пространстве $V_n(x; g)$ существуют инфинитезимальные проективные преобразования тогда и только тогда, когда вектор смещения этих преобразований $\widetilde{\xi}^h(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_k u_{ij} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_{(i} g_{j)k}, \tag{4}$$

где $u_{ij} = \nabla_{(i}\xi_{j)}, \xi_i = g_{i\alpha}\xi^\alpha$.

Задавая вектор $\psi_k(y)$ в виде аналитических функций действительных переменных

$$\psi_k(y) = b_k + b_{kl} y^l + b_{kl_1l_2} y^{l_1} y^{l_2} + b_{kl_1l_2l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \ldots$$

и исследуя уравнения типа (4) в пространстве $\widetilde{V}_n^2$, в явном виде найден вектор $\widetilde{\xi}^h(y)$

$$\widetilde{\xi}^h = a^h_{\cdot} + a^h_{\cdot l} y^l + \big(b_{l_1}\delta^h_{l_2} + \frac{1}{3} a^\alpha \underset{\circ}{R}_{\cdot l_1 l_2 \alpha}\big) y^{l_1} y^{l_2},$$

исследуются алгебраические уравнения, которым должны удовлетворять постоянные $a^h_{\cdot}$ и $a^h_{\cdot\, l}$.

Литература

[1] С. М. Покась. *Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения*, *Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В. Г. Белинского*, №26, 41 : 173-183, 2011.

[2] А. В. Аминова. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий.* Москва : Янус-К, 1978.

О существовании энергетической функции у динамических систем

Починка Ольга Витальевна
(НИУ ВШЭ (Россия, Нижний Новгород))
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`

Пусть M — гладкое компактное ориентируемое n-многообразие. *Функцией Ляпунова* динамической системы (потока или каскада), заданной на M называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль ее орбит вне цепно рекуррентного множества. В силу результатов Ч. Конли [1], такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название "Фундаментальная теорема динамических систем". Следует отметить, что сам Ч. Конли дополнительно требовал, чтобы образ цепно рекуррентного множества в силу φ был нигде не плотен на прямой, а значения функции φ на различных компонентах цепно рекуррентного множества были различны и называл такую функцию *полной функцией Ляпунова*. Числа, принадлежащие образу цепно рекуррентного множества, Ч. Конли назвал критическими значениями функции φ. Однако для гладкой функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, где градиент функции обращается в ноль), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно рекуррентному множеству. В связи с чем, наряду с функцией Ляпунова, в гладкой категории используется понятие *энергетической функции*, то есть гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [2], который в 1961 году доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. К. Мейер [3] в 1968 году обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла.

Как заметил в 1985 году Дж. Фрэнкс [4], применение результатов В. Вильсона [5] к конструкции К. Конли даёт существование энергетической функции у любого гладкого потока с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Тогда с помощью надстройки можно построить гладкую функцию Ляпунова для любого диффеоморфизма с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Но, построенная таким образом функция, может иметь критические точки, которые не являются цепно рекуррентными и, следовательно, функция Ляпунова не является энергетической. Встает вопрос о том, какие дискретные динамические системы допускают энергетические функции. Первые результаты в этом направлении были получены Д. Пикстоном в 1977 году, в своей работе [6] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла на поверхности. В 2012 году Т. Митрякова, О. Починка, А. Шишенкова обобщили результат Пикстона на Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством, энергетическая функция Морса для таких диффеоморфизмов была построена в работе [7]. В той же работе [6] Д. Пикстон построил диффеоморфизм Морса-Смейла на трехмерной сфере, не обладающий энергетической функцией Морса. В работах [8], [9] и книге [10] В. Гринесом, Ф. Лауденбахом, О. Починкой найдены необходимые и достаточные условиях существования энергетической функции Морса у трехмерных диффеоморфизмов Морса-Смейла. Кроме того, этими же авторами в работе [11] доказано, что в примере Пикстона минимальное число критических точек функции Ляпунова, отличных от периодических точек каскада, равно двум.

Из вышесказанного следует, что не все диффеоморфизмы даже с регулярной динамикой имеют энергетическую функцию. Тем более удивительным является факт наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим поведением, доказанный В. Гринесом, М. Носковой, О. Починкой в работах [12], [13], [14] для некоторых классов Ω-устойчивых 2- и 3-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами коразмерности один. Технически построение такой функции базируется на процедуре сглаживания непрерывного отображения.

Несмотря на имеющееся значительное продвижение в вопросах построения энергетических функций для дискретных динамических систем, остается множество открытых вопросов. В частности, нет алгоритма построения такой функции для произвольных Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхностей, хотя, по-видимому, такая функция существует. Более того, на многообразиях большой размерности нет техники построения энергетических функций даже в классе регулярных динамических систем.

Благодарности. Исследования выполнены в рамках проекта РНФ 17-11-01041.

Литература

[1] Conley C. Isolated Invariant Sets and Morse Index / Conley C. // CBMS Regional Conference Series in Math. —1978. V. 38.

[2] Smale S. On gradient dynamical systems / Smale S. // Annals Math. —1961. —V. 74. —P.199–206.

[3] Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems / Meyer K. R. // Amer. J. Math. —1968. —V. 90. — P. 1031–1040.

[4] Franks J. Nonsingular Smale Flow on S^3 / Franks J. // Topology. —1985. —V. 24, № 3. — P. 265–282.

[5] Wilson W. Smoothing derivatives of functions and applications / Wilson W. // Trans. Amer. Math. Soc. —1969. —V. 139. —P. 413–428.

[6] Pixton D. Wild unstable manifolds / Pixyon D. // Topology. —1977. —V. 16. —P. 167–172.

[7] Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е. Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством / Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е. // Журнал средневолжского математического общества. —2012. — Т. 14, № 1. —С. 98–107.

[8] Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. Self-indexing enrgy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds / Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. // Moscow Math. Journal. —2009. —V. 9, № 4. —P. 801–821.

[9] Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds / Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. —2012. —V. 278, № 1. —P. 27–40.

[10] Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds / Grines V., Medvedev T., Pochinka O. // Springer International Publishing Switzerland. —2016. —364 P.

[11] Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О. В. Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами / Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О. В. // Математические заметки. —2009. —Т. 86, № 2. — С. 175–183.

[12] Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях / Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. // Труды Средневолжского математического общества. —2015. —Т. 17, № 3. — С. 12–17.

[13] Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О.В. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором / Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. // Труды Московского математического общества. —2015. —Т. 76, № 2. — С. 271–286.

[14] Гринес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В. Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один / Гринес В. З., Жужома Е. В., Починка О. В. // СМФН. —2015. —Т. 57. —С. 5-–30.

On the existence of energy functions for dynamical systems

The paper is devoted to the presentation of results related to the existence of energy functions for dynamical systems on manifolds. The energy function is a global Lyapunov function, which is constant on chain components and decreasing along trajectories outside the chain recurrent set. The main attention will be paid to the technique of constructing such functions for the content classes of Ω - and structurally stable discrete dynamical systems defined on manifolds of the dimension 2 and 3.

Элементы объема в гиперболическом пространстве положительной кривизны

Л. Н. Ромакина
(Россия, Саратов, Астраханская, 83)
E-mail: romakinaln@mail.ru

Гиперболическое пространство $\widehat{H}^3$ положительной кривизны может быть реализовано на гиперсфере вещественного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^4_1$. Но больший интерес, на наш взгляд, представляет интерпретация пространства $\widehat{H}^3$ в проективной схеме Кэли-Клейна, поскольку она может быть использована для описания взаимодействия атомных частиц [1]. В проективной модели пространство $\widehat{H}^3$ реализовано на идеальной области пространства Лобачевского Λ^3. Пространства $\widehat{H}^3$ и Λ^3 являются связными компонентами расширенного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$, понимаемого как проективное пространство $\mathbb{P}^3$ с бесконечно удаленной овальной поверхностью, называемой *абсолютом* пространств $\widehat{H}^3$, Λ^3 и $\mathbb{H}^3$ [2]. Напомним, что *овальной поверхностью* проективного пространства $\mathbb{P}^3$ называют невырожденную поверхность второго порядка сигнатуры 2, [3]. Пространство Лобачевского реализуется на внутренней, а пространство $\widehat{H}^3$ — на внешней области пространства $\mathbb{P}^3$ относительно абсолюта.

Все прямые пространства $\widehat{H}^3$ в зависимости от количества и природы общих с абсолютом точек образуют три типа [4]. *Эллиптические* (*гиперболические*) прямые пересекают абсолют в двух мнимо сопряженных (вещественных) точках. *Параболические* прямые касаются абсолюта и являются изотропными в пространстве $\widehat{H}^3$. Все плоскости пространства $\widehat{H}^3$ в зависимости от типа линии пересечения с абсолютом образуют также три типа [4]. *Эллиптические* плоскости пересекают абсолютную поверхность по нулевой линии [3]. *Гиперболические плоскости положительной кривизны* (см., например, [5], [6]) имеют с абсолютом общую овальную линию и представляют собой внешние относительно абсолюта компоненты расширенных гиперболических плоскостей. *Коевклидовы* плоскости (см., например, [7], [8]) пересекают абсолют по вырожденной линии второго порядка — паре мнимо сопряженных прямых.

Применяя схему работы [9], определяем в пространстве $\widehat{H}^3$ понятие объема фигуры через проективные инварианты фундаментальной группы преобразований, общей для пространств $\widehat{H}^3$, Λ^3 и $\mathbb{H}^3$. Рассматривая в пространстве $\widehat{H}^3$ различные ортогональные криволинейные системы координат, получаем элементы объема и формулы для вычисления объемов тетраэдров, грани которых не лежат в коевклидовых плоскостях, и фигур, ограниченных координатными поверхностями. Приведем основные формулы для трех из исследованных координатных систем.

Система координат C_1 первого типа определена полным флагом пространства $\widehat{H}^3$ с эллиптической осью и эллиптической базовой плоскостью. Параметризация в системе C_1 задана формулами

$$\bar{x}_1 = \rho\cos u\cos v\cosh w,\ \bar{x}_2 = \rho\sin u\cos v\cosh w,\ \bar{x}_3 = \rho\sin v\cosh w,\ \bar{x}_4 = \rho\sinh w,$$

$$\text{где}\quad |u| \in [0,\pi),\quad |v| \in [0,\pi),\quad |w| \in \mathbb{R}_+,$$

устанавливающими зависимость собственных проективных координат $(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3)$ точек пространства $\widehat{H}^3$ в присоединенном каноническом репере R^* первого типа от криволинейных координат (u, v, w) точек в системе C_1. Элемент объема в системе C_1 задан формулой

$$dV = \rho^3\cos v\cosh^2 w\,du\,dv\,dw.$$

Системы ортогональных криволинейных координат $C_{2,E}$ и $C_{2,H}$ второго типа в пространстве $\widehat{H}^3$ определены полными флагами с эллиптической осью и гиперболической базовой плоскостью. Система $C_{2,E}$ задает параметризацию внутри, а система $C_{2,H}$ — вне светового конуса с вершиной в полюсе базовой плоскости относительно абсолюта. Формулы параметризации и элементы объема в системах $C_{2,E}$ и $C_{2,H}$ имеют соответственно вид:

$$C_{2,E}:\quad \bar{x}_1 = \rho\cos u\cosh v\cos w,\ \bar{x}_2 = \rho\sin u\cosh v\cos w,\ \bar{x}_3 = \rho\sin w,\ \bar{x}_4 = \rho\sinh v\cos w,$$

$$\text{где} \quad |u| \in [0, \pi), \quad |v| \in \mathbb{R}_+, \quad |w| \in [0, \pi);$$

$$C_{2,H}: \quad \bar{x}_1 = \rho \cos u \sinh v \sinh w, \ \bar{x}_2 = \rho \sin u \sinh v \sinh w, \ \bar{x}_3 = \rho \cosh w, \ \bar{x}_4 = \rho \cosh v \sinh w,$$

$$\text{где} \quad |u| \in [0, \pi), \quad |v| \in \mathbb{R}_+, \quad |w| \in \mathbb{R}_+;$$

$$C_{2,E}: \quad dV = \rho^3 \cosh v \cos^2 w \, du \, dv \, dw; \quad C_{2,H}: \quad dV = \rho^3 \sinh v \sinh^2 w \, du \, dv \, dw.$$

Координатные поверхности в системах C_1, $C_{2,E}$ и $C_{2,H}$ следующие: при фиксированном значении координаты u — гиперболические плоскости, содержащие прямую, полярную к базовой оси системы отностельно абсолюта; при фиксированном значении координаты v — круговые конусы с вершиной в абсолютном полюсе базовой плоскости; при фиксированном значении координаты w — сферы пространства $\widehat{H}^3$ с центром в абсолютном полюсе базовой плоскости системы, причем в системе C_1 такие координатные поверхности — гиперсферы (их центры лежат в пространстве Лобачевского), в системах $C_{2,E}$, $C_{2,H}$ — соответственно эллиптические и гиперболические сферы.

В отличие от пространства Лобачевского, пространство $\widehat{H}^3$ содержит конечные биортогональные тетраэдры (ортосхемы), содержащие два ребра на взаимно полярных относительно абсолюта прямых. Такие тетраэдры мы называем *монополярными*. Формула объема для монополярного тетраэдра принимает наиболее простой вид и аналогична известной формуле эллиптической геометрии:

$$V = \frac{1}{2}\rho ab,$$

где ρ — радиус кривизны пространства $\widehat{H}^3$; a, b — длины базисных ребер, однозначно определяющих монополярный тетраэдр.

Литература

[1] Л. Н. Ромакина. Развитие представлений о геометрии окружающего пространства. *Евразийское научное объединение*, 1:10(10) : 18–21, 2015.

[2] Б. А. Розенфельд. *Неевклидовы пространства.* Наука : М., 1969.

[3] Н. В. Ефимов. *Высшая геометрия.* Наука : М., 1971.

[4] Л. Н. Ромакина. Классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в гиперболическом пространстве положительной кривизны. *Чебышевский сб.*, 16(2) : 208–221, 2015.

[5] Л. Н. Ромакина. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 частях. Ч. 1: Тригонометрия.* Изд-во Сарат. ун-та : Саратов, 2013.

[6] Л. Н. Ромакина. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 частях. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения.* Изд-во Сарат. ун-та : Саратов, 2013.

[7] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. *Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства.* МЦНМО : М., 2003.

[8] Л. Н. Ромакина. *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей.* Научная книга : Саратов, 2008.

[9] Л. Н. Ромакина. К теории площадей гиперболической плоскости положительной кривизны. *Publications de L'Institut Mathematique. Nouvelle serie*, 99(113) : 139–154, 2016.

Расстояния внутри цилиндров, конечные и бесконечные

А. Н. Романов
(ОмГУ, Омск, Россия)
E-mail: aroms@yandex.com

В этой работе мы изучаем поведение лоренцева расстояния между точками в пространстве-времени, наделенном лоренцевой метрикой и, соответственно, лоренцевой функцией расстояния. В частности, нас интересует изучение фактов возможного наличия в пространстве точек (объектов), между которыми лоренцево расстояние может оказаться бесконечным.

Как известно, в рамках приложений теории пространства-времени, лоренцево расстояние ассоциируется с собственным временем, которое проживает точка (объект) при движении вдоль времениподобной (а иногда и изотропной или пространственноподобной) кривой. Таким образом, наличие бесконечного положительного расстояния между определенными точками пространства-времени интерпретируется, во-первых, как факт существования времениподобных кривых, связывающих эти точки, а во-вторых, как возможность подобрать времениподобную кривую, длина которой будет сколь угодно большой, что, в рамках упомянутой интерпретации, говорит о том, что собственное время, проживаемое точкой при движении от начальной точки к конечной, может оказываться сколь угодно большим, в зависимости от выбора траектории движения.

В работе мы выстраиваем классификацию причин, которые приводят к бесконечным лорецневым расстояниям между некоторыми точками и приводим примеры пространств, которые таким свойством обладают, или наоборот примеры классов пространств, которые не могут обладать свойством бесконечности лоренцевой функции расстояния, даже при условии введения произвольного неотрицательного конформного множителя-функции, который, не меняя причинной структуры пространства-времени, тем не менее, может преобразовывать величину лорецнева расстояния между точками.

В качестве примера можно привести пространство так называемого цилиндрического типа, основой которого является пространство, являющееся двумерным цилиндром (назовем условно одну координату вертикальной, а другую - круговой) с метрикой, допускающей следующие свойства: пространство-время является хронологическим, так как в нём нет замкнутых времениподобных кривых, однако оно не является причинным, так как присутствует одна замкнутая причинная (а точнее изотропная) кривая - при нулевой вертикальной координате. То есть эта замкнутая изотропная кривая представляет из себя как раз замкнутую горизонтально расположенную внутри цилиндра окружность, при движении по которой у точки меняется лишь горизонтальная координата.

В таком пространстве метрика имеет некоторую "особенность" при она-то и создаёт замкнутую изотропную кривую, то есть имеет место нарушение причинности. В областях выше и ниже этой замкнутой изотропной кривой замкнутых причинных кривых нет.

При необходимости в это пространство можно добавить дополнительные измерения при помощи произведения Римана, так что сама двумерность здесь оказывается не принципиальна. В нашей работе мы приводим конкретные примеры метрик для подобных двумерных пространств, показываем, что в них, в зависимости от выбранной метрики, может как присутствовать, так и отсутствовать факт наличия бесконечных лоренцевых расстояний между некоторыми точками (например, в случае вышеописанного примера, эти точки лежат по разные стороны от замкнутой изотропной кривой, одна выше, вторая половина ниже. Однако в первую очередь нас интересует именно факт возможного наличия бесконечного лоренцего расстояния между некоторыми точками.

В более общем случае мы доказываем, что существуют пространства произвольной (конечной) размерности (которые можно, например, построить на основе рассмотренных выше двумерных) и которые также допускают бесконечные значения своей лоренцевой функции расстояния при условии, однако, сохранения свойства времениподобности, то есть отсутствия замкнутых времениподобных кривых.

Таким образом, в указанном пространстве-времени, хоть и нет замкнутых времениподобных кривых, но тем не менее, существуют точки (объекты), расстояние между которыми равно бесконечности.

Далее, в работе приводится исследование, показывающее, что существует еще один класс пространств со свойством бесконечности лоренцева расстояния, однако же причины этой бесконечности уже кроются в топологической структуре пространства-времени, а не причинной структуре, как было в случае с пространствами, описанными выше.

Литература

[1] Дж. Бим , П. Эрлих. *Глобальная лоренцева геометрия*,- М.: Мир, (1985).

[2] А. Н. Романов *Отображения пространства-времени и условия причинности*,- // Тезисы докладов конференции по Анализу и Геометрии. ИМ СО РАН. Новосибирск. (2004), С. 219

Аксиома Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей для почти контактных метрических многообразий класса NC_{10}

Рустанов Алигаджи Рабаданович
(ИСГО МПГУ, Москва, Россия)
E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Харитонова Светлана Владимировна
(ОГУ, Оренбург, Россия)
E-mail: hcb@yandex.ru

Определение 1. [1]. АС-структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = \xi\nabla_X(\eta)\Phi Y + \xi\nabla_Y(\eta)\Phi X + \eta(X)\nabla_{\Phi Y} + \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi,$$

для всех $X, Y \in X(M)$, называется NC_{10}*-структурой.*

Определение 2. АС-многообразие, снабженное NC_{10}-структурой называется NC_{10}*-многообразием.*

Определение 3. [2], [3]. $(2n+1)$-мерное почти контактное метрическое многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей, $1 \leq r \leq n$, если через каждую точку $p \in M$ для всякого $(2r+1)$-мерного подпространства $L \in T_p(M)$ инвариантного относительно действия структурного оператора Φ_p, проходит $(2r+1)$-мерное вполне геодезическое Ф-инвариантное подмногообразие $N \subset M$ такое, что $T_p(N) = L$.

Теорема 4. *NC_{10}-многообразие, удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей, является косимплектическим многообразием.*

Теорема 5. *NC_{10}-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей тогда и только тогда,когда на пространстве присоединенной G-структуры компоненты тензора голоморфной кривизны удовлетворяют соотношениям $A^{ad}_{bc} = \frac{rh:1}{(n+1)n}A\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$.*

Теорема 6. *NC_{10}-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны $c = \frac{rh:2}{(n+1)n}A$.*

Теорема 7. *NC_{10}-многообразие удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей, локально эквивалентно произведению вещественной прямой на одно из следующих многообразий, снабженных канонической келеровой структурой: 1) комплексное евклидово пространство C^n, 2) комплексное проективное пространство CP^n, 3) комплексное гиперболическое пространство CD^n.*

Литература

[1] А. Р. Рустанов. *Многообразия класса NC_{10}*. Преподаватель XXI век., № 3. : 209-218, 2014.
[2] В. Ф. Кириченко. *Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной геометрии.* // Известия АН СССР. Сер. Матем. Т. 48, №4. 711-739, 1984.
[3] В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов. *Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий.* // Математический сборник Т. 193, №8. С. 71-100.

Минимальные системы образующих венечноитерированных групп и фундаментальной группы орбит функции Морса

Скуратовский Р. В.
(Украина, Киев)
E-mail: ruslcomp@mail.ru

В данной работе усилен результат о числе порождающих венечноциклических групп введенный автором в [1] а также рассмотрен класс венечноитериранных групп $\Im$ (пусть $G \in \Im$) построенных по формуле:

$$G = (\mathop{\wr}_{j_0=0}^{n_0} C_{k_{j_0}}) \times (\mathop{\wr}_{j_1=0}^{n_1} C_{k_{j_1}}) \times \ldots \times (\mathop{\wr}_{j_l=0}^{n_l} C_{k_{j_l}}), 1 \leq k_{j_i} < \infty, n_i < \infty.$$

Рассмотрим группу $H = \mathop{\wr}_{j=1}^{n} C_{i_j}$, где порядки i_j всех C_{i_j} попарно взаимно-просты для $j > 1$ а количество цилических множителей в сплетении циклических групп – произвольное конечное. Назовем такую группу H *венечноитерированной*.

Теорема 1. *Группа $H = \mathop{\wr}_{j=1}^{n} C_{i_j}$, являющаяся сплетением циклических групп как групп подстановок действующих регулярно, а порядки i_j попарно взаимно-просты для всех различных $j > 1$, имеет ранг 2* [2].

Возьмем в качестве образующих группы H корневой автоморфизм β_0 и направленный автоморфизм [3] вдоль пути l на корневом регулярном дереве T_X — β_1. Элемент β_1 венечноитерированной группы H представим в виде венечной рекурсии [4, 5]. Обозначим порядок автоморфизма β_i как $|\beta_i|$. Пусть $\mathop{\wr}_{j=0}^{n} C_{i_j} = \langle \beta_0, \beta_1 \rangle$ и $\mathop{\wr}_{j=0}^{m} C_{k_j} = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$.

Теорема 2. *Если $(|\alpha_0|, |\beta_0|) = 1$ и $(|\alpha_1|, |\beta_1|) = 1$ или $(|\alpha_0|, |\beta_1|) = 1$ и $(|\alpha_1|, |\beta_0|) = 1$, то существует двухэлементая система образующих для группы $G = (\mathop{\wr}_{j=0}^{n} C_{i_j}) \times (\mathop{\wr}_{j=0}^{m} C_{k_j})$, где порядки i_j всех C_{i_j} а также порядки k_j всех C_{k_j} попарно взаимно-просты для $j > 1$.*

Образующие α_1 и β_1 есть направленные автоморфизмы, α_0, β_0 — корневые автоморфизмы [3]. Структура образующих $\beta_i, i > 0$, такова $\beta_1 = (\pi_{i_1}, e, ..., e, \beta_2)$, где $C_{i_1} = \langle \pi_{i_1} \rangle$, далее $\beta_2 = (\underbrace{\pi_{i_2}, e, ..., e, \beta_3}_{i_1})$, в общем случае $\beta_k = (\underbrace{\pi_{i_k}, e, ..., e, \beta_{k+1}}_{i_{k-1}})$ где, $C_{i_k} = \langle \pi_{i_k} \rangle$. Последний образующий имеет иную структуру $\beta_m = (\pi_m, e, ..., e)$. Аналогичную структуру имеет образующий α_1.

Найдена минимальная система образующих для группы $(Z)^n \rtimes Z$, где гомоморфизм связи из группы Z в группу автоморфизмов группы Z^n может быть представлен матрицей ϕ, которая для $n = 4$ имеет вид

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а образующие подгруппы Z^n представляются в виде векторов.

Группа такого типа возникает как фундаментальная группа орбиты $\pi_1(O_f, f)$ некоторой функции Морса f на листе Мёбиуса M [6].

Литература

[1] Р. В. Скуратовский. *Минимальные системы образующих для венечноциклических групп, групп автоморфизмов графов Риба и фундаментальных групп орбит некоторых функций Морса*, 11 Летняя школа *Алгебра, Топологія, Аналіз*, с. 121–123, 2016.

[2] О. В. Богопольский, *Введение в теорию групп*, М., Наука, (2002), 148 с.

[3] Grigorchuk R. I., Bartholdi, Z. Sunik. *Branch groups.* Handbook of algebra, Vol. 3: North-Holland, Amsterdam, P. 121, 2003.

[4] R. V. Skuratovskii *Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups.* Source: https://arxiv.org/pdf/1702.05784.pdf, 2017.

[5] Y. A. Drozd, R. V. Skuratovskii. *Generators and and relations for wreath products.* Ukr. Math. J., vol. 60., No. 7, pp. 1168–1171, 2008.

[6] S. I. Maksymenko, *Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms.* 2013, arXiv:1311.3347.

Об одной задаче преследования по позиции с интегральными ограничениями на управления игроков

Собиров Х.Х.
(Ташкентский Университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан)
E-mail: sobhamidullo1986@mail.ru

Рассматривается дискретная игра, описываемая уравнениями

$$z_{k+1} = Cz_k - Bu_k + D\upsilon_k, \tag{1}$$

где $z_k \in R^n$, k — номер шага, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; C, B, D — постоянные матрицы, u_k — управление преследования на k-ом шаге, υ_k — управление убегания на k-ом шаге, $u_k \in R^p, \upsilon_k \in R^q$. В пространстве R^n выделено непустое терминальное множество M.

Будем говорить, что в игре (1) из точки $z_0 \in R^n \backslash M$ можно завершить преследование за N шагов, если по любой последовательности $\overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_1, \ldots, \overline{\upsilon}_{N-1}$ управления убегания можно построить такую последовательность $\overline{u}_0, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{N-1}$ управления преследования, что решение $\{z_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N\}$ уравнения

$$z_{k+1} = Cz_k - \overline{u}_k + \overline{\upsilon}_k, k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

при некотором $d \leqslant N$, попадает на $M : \overline{z}_d \in M$. При этом для нахождения значения $\bar{u}_k$ разрешается [1] использовать значения z_k.

Предположим, что в игре (1) терминальное множество имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство R^n, M_1 — подмножество подпространства L — ортогонального дополнения M_0 в R^n. Далее, через π обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L, а через $A + B$ — алгебраическую сумму множеств A, B соответственно.

В дальнейшем будем считать, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i|^{\alpha} \leqslant \rho^{\alpha}, \ \ \sum_{i=0}^{\infty} |\upsilon_i|^{\beta} \leqslant \rho^{\beta},$$

где $\alpha \geqslant 1,\ \ \beta, \rho > 0,\ \ \sigma \geqslant 0$ — некоторые фиксированные числа.

Предположение 1. Для каждого $i, i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, имеет место включение $\pi C^i D R^q \subset \pi C^i B R^p$.

Ясно, что при выполнении предположения 1 существуют матрицы $F_i, i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, каждая из которых удовлетворяет условию $\pi C^i D = \pi C^i B F_i$. Пусть

$$\chi_m^{\alpha} = \left\{ \gamma : \gamma = \sum_{i=0}^{m-1} |F_{m-1-i}\upsilon_i|^{\alpha}, \sum_{i=0}^{m-1} |\upsilon_i|^{\beta} \leqslant \sigma^{\beta} \right\}, m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Предположение 2. Для каждого $m, m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, имеет место неравенства $\rho > |\chi_m|$

Через $G(m)$ — обозначим множество

$$\left\{ z \in L : z = \pi C^{m-1} B W_0 + ... + \pi B W_{m-1}, \sum_{i=0}^{m-1} |W_i|^{\alpha} \leqslant (\rho - |\chi_m|)^{\alpha} \right\},$$

через $W_4(m)-$ множество $M_1 + G(m)$, где $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение 1,2, кроме того, υ_n — наименьшее из тех чисел m, для каждого из которых имеет место включение $\pi C^m z_0 \in W_4(m)$,тогда в игре (1) из точки z_0 можно завершить преследование по позиции за N шагов.*

Литература

[1] Сатимов Н.Ю., О задаче преследования по позиции в дифференциальных играх, // ДАН СССР. - Москва. 1976. - Т. 229. - № 4. - С. 808-811.

Классификация точек поверхности пространства Минковского

Стеганцева П.Г.
(Запорожье, ул.Жуковского,66)
E-mail: steg_pol@mail.ru

Гречнева М.А.
(Запорожье, ул.Жуковского,66)
E-mail: mag83@list.ru

Задача классификации точек поверхности относится к основным задачам локальной дифференциальной геометрии. Точки гиперповерхностей евклидова пространства можно классифицировать несколькими способами: по числу асимптотических направлений в точке, по знаку и значениям главных кривизн гиперповерхности, с помощью гауссовой кривизны, по виду соприкасающегося параболоида. В случае, когда коразмерность поверхности больше единицы, решение подобной задачи имеет особенности и не является простым повторением классического случая гиперповерхности. Например, в этом случае не всегда точки поверхности можно разбить на конечное число классов. Задача классификации точек поверхности тесно связана с другими задачами локальной дифференциальной геометрии. Например, в работе [4] автор описывает преобразования, сохраняющие грассманов образ двумерной поверхности четырехмерного евклидова пространства, и их связь с классификацией точек грассманова образа поверхности [1] и аффинной классификацией точек самой поверхности [2]. Был исследован вопрос об эквивалентности этих двух классификаций. Ряд дополнительных особенностей возникает при решении задачи классификации точек поверхностей неевклидовых пространств.

В четырехмерном пространстве Минковского ${}^1R_4$ с метрикой $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ будем рассматривать неизотропные (пространственноподобные и времениподобные) двумерные поверхности.

Рассмотрим пучок вторых квадратичных форм $A^1 - \lambda A^2$ времениподобной поверхности $V^2 \subset^1 R_4$. В зависимости от вида элементарных делителей пучка уравнение соприкасающегося параболоида невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к одному из следующих канонических видов:

1) $x^3 = (x^1)^2$, $x^4 = (x^2)^2$, для случая элементарных делителей $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$;

2) $x^3 = 2x^1x^2$, $x^4 = (x^2)^2$, если имеем один линейный элементарный делитель кратности 2, то есть $(\lambda - \lambda_1)^2$, $\lambda_1 \in R$;

3) $x^3 = 2x^1x^2$, $x^4 = (x^1)^2 - (x^2)^2$, для квадратичного элементарного делителя $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$, $\beta \neq 0$.

Таким образом, точки поверхности можно разбить на три класса. Такая классификация точек называется аффинной. Заметим, что этот результат ничем не отличается от случая евклидова пространства [3], так как евклидово пространство и пространство Минковского имеют одни и те же аффинные свойства.

Далее рассмотрим еще одну классификацию точек поверхности, которую будем называть грассмановой. Этот термин объясняется тем, что тип точки поверхности определяется типом точек грассманова образа этой поверхности.

Определение 1. Точка x поверхности $V^2 \subset^1 R_4$ называется эллиптической (параболической, гиперболической), если точка грассманова образа поверхности, соответствующая этой точке x, является эллиптической (параболической, гиперболической).

Определение 2. Точка грассманова образа Γ^2 времениподобной поверхности V^2 называется эллиптической (параболической, гиперболической), если для площадки, касательной к Γ^2 в этой точке, секционная кривизна грассманова подмногообразия ${}^SPG(2,4)$ удовлетворяет условию $K(\sigma) < 1$ ($K(\sigma) = 1$, $K(\sigma) > 1$) [5].

Теорема 3. *Для времениподобной поверхности с пространственноподобным грассмановым образом аффинная и грассманова классификации эквивалентны.*

Для пространственноподобной поверхности можно сформулировать и доказать аналогичную теорему

Теорема 4. *Для пространственноподобной поверхности с времениподобным грассмановым образом аффинная и грассманова классификации эквивалентны.*

Литература

[1] Ю. А. Аминов. Геометрия подмногообразий К.: Наукова думка, 2002

[2] А. А. Борисенко. Аффинная классификация точек многомерных поверхнотей. *Сибир. мат. журнал*, 31(3): 17–29, 1990

[3] А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский. Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу. Укр. геом. сб. Вып.32: 11-27, 1989

[4] В. А. Горькавый. Деформируемость поверхностей F^2 в E^4 с сохранением грассманового образа *Труды конференции «Геометрия и приложения», посвященной 70-летию В.А.Топоногова*, Новосибирск, 34–57, 2001,

[5] П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства. *Известия вузов. Математика*, 2:65–75, 2017

4-квазипланарные отображения пространств со специальной полиаффинорной структурой

Хаддад М.
(Wadi University, Homs, Syria)
E-mail: akkad@ukr.net

Курбатова И.Н.
(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Ранее мы рассматривали 4-квазипланарные отображения почти кватернионных многообразий [1]. В [2]мы ввели в рассмотрение *полукватернионную* структуру, которая порождается парой почти комплексных структур, коммутирующих между собой. Соответственно, *почти полукватернионным* мы назвали риманово пространство V_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h - \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = 0.$$

Очевидно, что

$$\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = \delta_i^h, \quad \overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h$$

Как обычно, под келеровой [4] будем понимать полукватернионную структуру на V_n, для которой

$$\overset{s}{F}{}_{i,j}^h = 0, \quad s = 1,2,3,$$

где $<,>$ — знак ковариантной производной в V_n.

Показано [2]), что келерово полукватернионное пространство приводимо.

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$ с полукватернионными келеровыми структурами $\overset{s}{F}$, $\overset{s}{\overline{F}}$, $s = 1,2,3$, находящиеся в 4-квазипланарном отображении (4КПО), сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) имеют место

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{q}_{(i}(x) \overset{s}{F}{}_{j)}^h(x),$$

где

$$\overset{\circ}{F}{}_i^h = \delta_i^h, \quad \overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h, \quad \overset{s}{F}{}_i^h(x) = \overset{s}{\overline{F}}{}_i^h(x),$$

$\overset{s}{q}_i(x)$ - некоторые ковекторы.

Построены геометрические объекты, как неоднородные (типа параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств), так и тензорного характера (типа тензора Вейля), инвариантные относительно рассматриваемых отображений.

Выделен класс келеровых полукватернионных пространств (4-*квазиплоских*), допускающих 4КПО на плоское пространство. Найдена структура их тензора Римана [3]. Нами доказаны

Теорема 1. *Тензор Римана 4-квазиплоского полукватернионного келерова пространства* $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ *по необходимости имеет структуру*

$$R_{ijk}^h = \widetilde{R}_{\alpha[j} Q_{k]i}^{h\alpha} + 2\widetilde{R}_{\alpha k}\left(\overset{1}{F}{}_i^h \overset{1}{F}{}_j^\alpha - \overset{2}{F}{}_i^h \overset{2}{F}{}_j^\alpha\right)$$

$$\widetilde{R}_{hk} = \left(C_1 R - C_2 \overset{3}{R}\right) g_{hk} - \left(C_2 R - C_1 \overset{3}{R}\right) \overset{3}{F}_{hk},$$

где

$$Q_{ij}^{kh} = \delta_i^k \delta_j^h - \overset{1}{F}{}_i^k \overset{1}{F}{}_j^h - \overset{2}{F}{}_i^k \overset{2}{F}{}_j^h + \overset{3}{F}{}_i^k \overset{3}{F}{}_j^h,$$

$R = R_\alpha^\alpha$ - *скалярная кривизна* V_n, $\overset{3}{R} = R_\beta^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^\beta$,

$$C_1 = \frac{n^2 + 2n + 2m^2 - 2mn}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}, \qquad C_2 = \frac{(2m-n)(n+2)}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}$$

— *константы при* $m \neq 2, n-m \neq 2$.

Теорема 2. *Любое* 4*-квазиплоское полукватернионное келерово пространство допускает нетривиальные* 4*КПО.*

Теорема 3. 4*-квазиплоское полукватернионное келерово пространство* $\left(V_n, g_{ij}(x^i), \overset{s}{F}(x^i)\right)$ *представляет собой произведение*

$$V_n = V_m \times V_{n-m},$$

где $\left(V_m(x^a), g_{ab}(x^c), \overset{1}{F}{}_b^a(x^c)\right)$ *является келеровым относительно аффинора* $\overset{1}{F}{}_b^a(x^c)$ *пространством постоянной голоморфной кривизны, а* $\left(V_{n-m}(x^A), g_{AB}(x^C), \overset{1}{F}{}_A^B(x^C)\right)$, *соответственно, келеровым относительно аффинора* $\overset{1}{F}{}_A^B(x^C)$ *пространством постоянной голоморфной кривизны.*

Литература

[1] И. Н. Курбатова О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий. *Мат.Студiї*, V.40, No 1: С.95-103, 2013.

[2] И. Н. Курбатова 4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий *Proceedings of the International Geometry Center*, V.8, No 1: С.63-73, 2015.

[3] И. Н. Курбатова О 4-квазипланарных отображениях полукватернионных келеровых многообразий *Proceedings of the International Geometry Center*, V.9 No 2: С.49-62, 2016.

[4] Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой *Итоги науки: Геометрия, 1963* ,М.: ВИНИТИ. С.165-212, 1965.

Зміст